



**Research Network on Innovation
Réseau de Recherche sur l'Innovation**

**WORKING PAPERS
DOCUMENTS DE TRAVAIL**

N°4 / 2008

**UN ESSAI DE MODELISATION DU FINANCEMENT DE
PROJETS INNOVANTS PAR LE CAPITAL-RISQUE A PARTIR
DES OPTIONS REELLES**

Christian PONCET

UN ESSAI DE MODELISATION DU FINANCEMENT DE PROJETS INNOVANTS PAR LE CAPITAL-RISQUE A PARTIR DES OPTIONS REELLES

Christian PONCET¹

RESUME

Le processus d'innovation ne concerne plus seulement l'entrepreneur innovateur qui, à l'image de Bernard Palissy, brûlerait jusqu'à ses meubles pour atteindre son objectif. L'intermédiation des institutions financières et le développement de nouveaux instruments financiers ou l'apparition d'opérateurs toujours plus spécialisés, semblent modifier sensiblement les fondements de la dynamique d'innovation industrielle. Le capital-risque joue un rôle très important dans le financement de projets innovants, et cette présentation s'inscrit dans un repérage des conditions de mobilisation de ces fonds. Le modèle présenté a donc pour objectif de repérer des variables susceptibles d'inciter les organisations impliquées, à investir dans des projets à risque, et cela, en essayant d'intégrer les pratiques financières de ces opérateurs. L'adaptation de modèles basés sur les options financières, et la construction de portefeuilles adaptés, semblent répondre aux pratiques observées du capital-risque. Ce travail se conclut alors sur une étude de la sensibilité du modèle, aux différents coefficients sur lesquels il s'appuie, plus particulièrement, sur le caractère incitatif du niveau des taux d'intérêts concernant l'entrée du capital-risque dans un projet, et sur ses conséquences sur les conditions de sortie.

Mots clés :

Capital-risque, projet innovant, dynamique, gestion de portefeuilles, options réelles, instruments financiers.

ABSTRACT

The process of innovation does not concern any more the innovating entrepreneur who, like Bernard Palissy, would burn to his pieces of furniture to achieve his goal. Financial intermediation institutions and new financial tools development or arrival of new operators more and more specialized, seem to appreciably modify the bases of industrial innovation dynamics. The venture capital takes a very important place in the financing of innovating projects, and this presentation falls under a location of the conditions of mobilization of these funds. Thus, the present model aims to locate variables likely to incite the organizations implied, to invest in projects with risk, and that, while trying to integrate the financial practices of these operators. The adaptation of models based on the financial options, and the construction of adapted portfolio, seem to answer the practices observed of the venture capital. This work is concluded then on a study from the sensitivity of the model, with the various coefficients on which it is based, more particularly, on the inciting character of the level of interest rates concerning the entry of the venture capital in a project, and on its effects on the conditions of exit.

Key words:

Venture capital, innovating project, dynamic, portfolio management, real options, financial tools.

© Réseau de Recherche sur l'Innovation, 2008

¹ RIO LERASS, UFR de Sciences Economiques, Site Richter
Avenue de la Mer - CS 79606
34960 Montpellier Cedex 2
France
tel: 33 (0)4 67 15 83 12
Mel : christian.poncet@univ-montp1.fr

UN ESSAI DE MODELISATION DU FINANCEMENT DE PROJETS INNOVANTS PAR LE CAPITAL-RISQUE A PARTIR DES OPTIONS REELLES

Christian PONCET

TABLE

Positionnement du problème en guise d'introduction	4
1. Principes de gestion du capital-risque, et les relations avec le modèle présenté	5
2. Quelques éléments de formalisation	7
3. Valeur du projet et gestion du risque	8
3.1. La dynamique industrielle du portefeuille	8
3.2. La gestion financière du projet	9
4. Le risque et le temps	15
4.1. Quelques conséquences sur le modèle de l'introduction du temps	15
4.2. L'introduction de la gestion financière du projet.	17
Annexe I	
Construction de l'espérance mathématique de la valeur du projet à une date t :	29
Annexe II	
Vérification graphique de quelques hypothèses implicites dans le modèle.	31
Annexe III	
Résolution de l'équation différentielle	32
Éléments bibliographiques	33

Positionnement du problème en guise d'introduction

Le processus d'innovation implique l'intervention de différents acteurs économiques, au rôle bien défini, afin de conduire à l'émergence d'un produit ou d'un procédé nouveau. La transformation d'une idée (invention) en innovation traverse ainsi diverses étapes, dont chacune se caractérise par l'implication de formes organisationnelles bien identifiées. Par exemple, les potentialités techniques contenues dans une publication scientifique, peuvent prendre l'aspect d'un projet innovant (sous l'impulsion de chercheurs) qui, peu à peu, se structure autour de brevets, de plans de financement, d'aides (publiques), etc.... La maturation de ce projet, dans des conditions favorables, conduit à la création d'une entreprise qui poursuit ainsi son chemin, avec des contraintes spécifiques d'organisation, de croissance et de financement. Si le projet innovant aboutit, l'étape d'industrialisation et de commercialisation s'impose, avec un changement de stratégie, impliquant une modification profonde de l'organisation¹. Il s'agit, pour le porteur du projet, voire l'industriel, de franchir un certain nombre d'étapes qui lui permettraient *in fine* de déboucher vers une commercialisation du produit ou du procédé nouveau. Parce que chacune de ces étapes se construit autour de spécificités, en termes techniques, relationnels, de risques, de financements, etc., elle nécessite des compétences particulières, à la fois dans la transformation de l'invention, et dans la gestion (financière, organisationnelle, de réseaux) du processus d'industrialisation. L'identification de ces étapes permet de mesurer leur degré d'interdépendance, et donc les obstacles éventuellement rencontrés, selon le stade d'évolution du projet (ressources financières, humaines, implication d'organismes publics, ou privées, localisation géographique, etc....). Le passage d'un stade à l'autre implique souvent une modification profonde dans la conception du projet, et constitue dans tous les cas une profonde remise en cause.

L'efficacité de la dynamique implique plus globalement, une relation performante entre le processus technique d'innovation et la gestion financière du risque. Cette position privilégiée de la gestion financière du risque dans le processus d'innovation, amène à focaliser l'attention sur la question des moyens mobilisés comme des acteurs impliqués. Les modalités de financement du processus viennent par conséquent « se coller » à la dynamique décrite précédemment, car elles représentent dans tous les cas une forme d'expression de la gestion du risque (par l'adaptation des outils financiers aux besoins des porteurs de projet). Ces formes d'intervention s'attachent également à favoriser la construction de passerelles entre diverses étapes (en accompagnant les mutations indispensables et donc risquées des organisations impliquées). Derrière cette question maintenant cruciale du financement du processus, se profile donc celle du comportement des institutions qui l'assurent. Les défaillances qui pourraient être observées dans le processus d'innovation, se fondent souvent sur des relais financiers qui réagissent peu ou à retardement aux besoins des porteurs de projet. Ces phénomènes se trouvent exacerbés aux deux frontières qui soulignent les risques liés au processus : le passage d'un financement public vers un financement privé (du stade de projet au stade d'entreprise), et la sortie du capital-risque (passage d'un mode spécifique de financement à un mode plus classique). Au regard de l'importance des organismes liés au financement du processus d'innovation, la mise en lumière d'éléments qui influent ou conditionne leur comportement, devient ainsi un enjeu pour tout ce qui se rapporte à cette question.

¹ Poncet C. [2006] De l'académie vers le marché. Revue Française de Gestion. N° 161 février pp 13-34

Les modalités d'intervention du capital-risque, dans le processus d'innovation, reposent sur des approches spécifiques de la gestion du risque, et s'appuient sur des organisations capables de retirer un rendement financier « intéressant », à partir d'opérations très risquées. De ce point de vue, le lien entre la gestion du risque et le rendement d'un titre, s'étudie souvent sur la base des options financières, qui présentent une relation positive entre la volatilité de l'actif et le prix de l'option¹.

1. Principes de gestion du capital-risque, et les relations avec le modèle présenté

L'idée de capital-risque² renferme des formes très variées d'intervenants et d'interventions. Une définition relativement large, conduit à présenter cet opérateur comme un fournisseur de capitaux pour des entreprises innovantes, sur des projets techniquement et commercialement risqués, et sous la forme d'un financement par le haut du bilan. Les prises de participation du capital-risque dans ces sociétés n'ont pas vocation à être pérennisées, puisque leur rémunération s'opère essentiellement par les plus-values réalisées lors de la vente des titres en portefeuille. L'intervention de l'opérateur au niveau le plus élevé du passif du bilan de la société (fonds propres), l'amène à s'impliquer dans ses orientations stratégiques, voire dans le choix de ses dirigeants ou la fusion de la société. De ce point de vue, les prérogatives du capital risque dépassent largement celles des opérateurs bancaires traditionnels, ce qui leur confère une position tout à fait singulière dans le financement des entreprises. Les ressources financières du capital-risque s'avèrent, elles aussi, diversifiées et dépendent du montant des fonds mobilisés. Les agents qui participent au financement des projets innovants par le biais du capital-risque se répartissent selon trois niveaux :

Le premier concerne les ressources financières (publiques ou privées), canalisées par des institutions qui orientent ces fonds vers les entreprises innovantes. Les pouvoirs publics mettent généralement en place des outils incitatifs pour drainer ces flux vers des projets innovants, ils interviennent également souvent dans le financement du capital-risque (Caisse de Dépôts et de Consignation, fonds régionaux). Comme le montre le schéma ci-dessous, il existe une interdépendance forte entre les politiques publiques et les organismes financiers et cela depuis très longtemps aux Etats-Unis (Création de la SBA et des SBIC dans le milieu du siècle dernier).

Le second concerne ce qui sera appelé par la suite le capital-risque. La distinction avec certains organismes financiers qui interviennent au niveau précédent, semble rigoureusement difficile à réaliser. Le modèle qui suit suppose donc que, dans tous les cas, l'organisme au contact des projets se dénomme « capital-risque » et celui situé directement en amont, « bailleur de fonds » (avec toute l'ambiguïté que ces termes peuvent contenir dans la pratique).

Enfin, les projets innovants qui reçoivent ces fonds, et prennent le statut de sociétés (PME) sensées porter le projet innovant (elles n'existent souvent que par lui, du moins, au début du processus).

¹ Black F, Scholes M. [1973] The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy n°81 pp. 635-654.

² Cette expression ne désigne pas ici un agent particulier, l'opérateur en capital risque, mais plutôt une fonction qui peut largement dépasser le cadre strict de son activité. En fait, la fonction de capital risque recouvrira par la suite, l'ensemble des opérations qui transforment un placement risqué en une épargne, générant un rendement assuré.

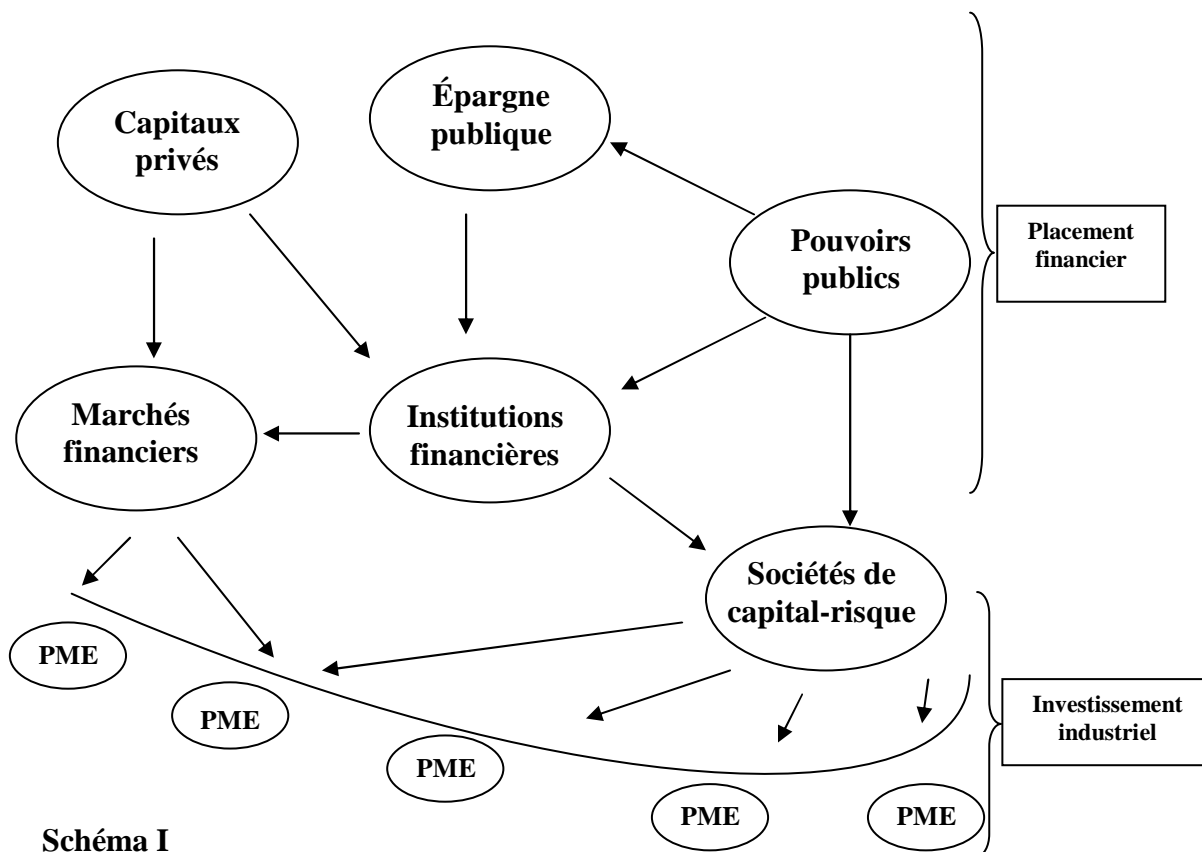


Schéma I

Relations entre les intervenants pour le financement de projets innovants

Le modèle qui suit interrogera également les instruments financiers mobilisés par le capital-risque. Dans le cas présent, les opérateurs tendent à privilégier des instruments hybrides (dans cette présentation, il s'agira d'obligations convertibles) qui, selon de nombreux analystes financiers représentent les instruments fondamentaux, pour la gestion du capital-risque¹. En effet, ces titres semblent parfaitement adaptés à la gestion financière du risque, que le projet aboutisse ou qu'il échoue. S'il aboutit, les titres en actions de la société se trouvent considérablement évalués, et la conversion des obligations en actions induit un important effet de levier pour le capital-risque. Ce scénario ne peut voir le jour qu'à la condition que l'opérateur puisse réaliser facilement ses plus-values, et donc trouver des intervenants susceptibles de lui racheter ses actions. S'il échoue, les fonds levés par l'intermédiaire des obligations convertibles constituent une dette pour la société, ce qui permet au détenteur de ces obligations d'accéder à un remboursement prioritaire face aux actionnaires.

Par conséquent, les obligations convertibles permettent une valorisation importante du portefeuille si le projet réussit ; et de limiter grandement les pertes s'il ne parvient pas à ses objectifs. En outre, pour ce qui concerne l'émetteur, ce type d'instrument lui permet de se financer à un coût inférieur à celui des obligations normales. Et, dans le cas où l'opérateur convertit ses titres, l'émetteur évite la charge liée au remboursement de la dette. Pour conclure, les avantages des obligations convertibles trouvent leurs limites auprès des porteurs

¹ Schmidt K. [2003] Convertible securities and venture capital finance. Journal of Finance Vol 58 june.

du projet dans la mesure où la conversion conduit à une dilution du pouvoir, voire à une réduction des résultats par action.

Le modèle présenté par la suite prétend donc montrer notamment l'importance de ces titres hybrides dans le déroulement du financement d'un projet innovant. Il s'attarde donc sur les modalités de la gestion financière du risque dans ce contexte, afin de mieux identifier les variables participant aux conditions d'intervention du capital-risque. De plus, le choix des outils de la modélisation doivent intégrer, autant que faire se peut, les modalités de calcul des opérateurs impliqués ; ce qui orientera la formalisation vers les approches en terme d'options réelles.

2. Quelques éléments de formalisation

Toute modélisation relève forcément d'une simplification, voire d'une schématisation de phénomènes souvent complexes. Dans le cas présent, une expertise¹ du projet innovant, conduit le capital-risque à lui associer un taux espéré de croissance, au regard de ses potentialités (techniques, industrielles, commerciales). Les modalités d'investissement de l'opérateur dans le projet, se conforment à la gestion d'un portefeuille d'actifs, lui permettant de limiter au maximum les risques que renferme le processus d'innovation. Le capital-risque va donc devoir gérer en parallèle un projet innovant et un portefeuille d'actifs, le second représentant la traduction financière d'une dynamique industrielle (le projet innovant) ; la gestion de portefeuille réplique alors la gestion risquée d'un projet industriel. Les conflits d'agences² liés aux asymétries d'information peuvent peser lourdement sur la dynamique d'innovation, ils n'entrent cependant pas dans le cadre du travail présenté, qui se positionne résolument dans la seule logique financière du capital risque : Doit-il intervenir, à quel moment de l'avancée du projet et selon quelles modalités de gestion des portefeuilles ?

Par conséquent, les prérogatives du capital-risque se limitent ici dans la constitution d'un portefeuille d'actifs, à partir notamment de titres hybrides (obligations convertibles), achetés par le biais de fonds, octroyés par des bailleurs, qui eux aussi attendent un certain rendement (au moindre risque) de leur placement. La présentation qui suit se place en outre dans le cadre de fonctions continues, ce qui implique également une continuité dans le processus de conversion d'obligations en actions. La variable α représente le taux espéré de croissance pour la valeur du projet (à la suite, par exemple, d'une expertise du projet), et I_1 le montant des investissements nécessaires à son développement. Or, entre t_0 et t_1 , le porteur du projet a déjà obtenu (ou trouvé) un montant I_0 qui lui a permis d'amorcer l'opération, et de porter la valeur du projet à un montant V_0 . De ce point de vue, le capital-risque se positionne à l'ouverture d'un « tour de table », les expertises se trouvent en sa possession, ainsi qu'une estimation financière des besoins de financement pour le projet. L'implication de l'opérateur se rapporte donc à l'ensemble du projet, considéré dans sa globalité, et les investissements qui

¹ Le rôle de l'expertise semble fondamental à un stade précoce, tant en terme technique (faisabilité et pertinence du projet) qu'informationnel. L'indépendance, la réputation des groupes d'experts, en amont, conditionnent très souvent la dynamique du processus, en aval. La confiance qu'induit le rapport d'expert autorise un engagement plus large des organismes financiers.

² Kaplan S. Stromberg P. [2001] Venture capital as principals: contracting, screening and monitoring. American Economics Review Vol 91 n° 2 Mai pp 426-430.

le supportent contribuent indistinctement à cette valorisation (abordée au travers de V_t)¹. Le processus dans lequel s'inscrit cette opération, justifie donc le caractère continu de la fonction $\Omega(V, t) = (V_t - I_1)$ sur la durée de vie du programme de financement. La fonction $F(V, t)$ représente alors pour le capital-risque, la valeur nette actualisée de l'option, attachée au projet dans son ensemble. Il s'agit pour l'opérateur de construire un portefeuille de titres lui permettant de faire face aux risques que contient le projet innovant. En outre, dans le cas le plus général, $\pi(V, t)$ décrit le flux de bénéfices dégagés à la date t par le projet. La valeur globale attendue pour ce projet se présente donc sous la forme d'une espérance mathématique, qui dépend des informations disponibles à la date t considérée :

$$F(V, t) = E_t \left[\int_t^{t_2} e^{-\rho(\tau-t)} \pi(V_\tau, \tau) d\tau + e^{-\rho(t_2-t)} \Omega(V_{t_2}, t_2) \right]$$

Où, $E_t[\cdot]$ représente l'espérance de gain en fonction de l'information disponible en t , et $\Omega(V_{t_2}, t_2)$ la valorisation du projet au terme de l'intervention du capital-risque.

Les deux niveaux identifiés précédemment (schéma I), induisent par conséquent des gestions spécifiques de fonds. Pour le premier niveau, il s'agira principalement de la gestion d'un investissement par le capital-risque dans un projet risqué ; pour le second, le capital-risque doit transformer cet investissement en un placement assurant un rendement non risqué aux bailleurs de fonds.

3. Valeur du projet et gestion du risque

La présentation qui suit repose sur un certain nombre d'hypothèses permettant de relier l'évolution attendue de la valeur du projet, avec la gestion financière des titres qui le représentent. Ce lien s'effectue par l'articulation maintenant classique, entre l'expression développée d'une intégrale stochastique, permettant d'évaluer l'évolution d'un portefeuille d'actifs (valeur de l'option), et les contraintes qui pèsent sur ce portefeuille en terme de gestion.

3.1. La dynamique industrielle du portefeuille

Le capital-risque construit le portefeuille d'actifs $F(V, t)$ qui dépend de la valeur du sous-jacent (V_t), lui-même, lié à la réussite du processus d'innovation. De ce point de vue, le portefeuille répliquant s'exprime comme un prolongement de la gestion industrielle du projet. Soient donc : $F_1(V, t)$ la valeur en t d'un portefeuille constitué par les actifs investis dans le projet (sous-jacent), et de titres non risqués. Ce portefeuille qui réplique la valeur de l'option pour l'opérateur, est supposé être continûment réajusté. Ce réajustement n'impliquant par la suite aucun coût de transaction.

V_t représente par conséquent la valeur du projet à la date t (abordée par exemple à partir d'une évaluation financière de ses actifs immatériels). Par hypothèse, dV_t suit un mouvement brownien géométrique de la forme : $dV_t = \alpha V_t dt + \sigma V_t dz$

$dF_1(V, t)$ la variation instantanée du portefeuille, donc de la valeur de l'option.

¹ L'annexe II établit un lien entre les caractéristiques du modèle et les conditions d'intervention du capital-risque.

Par conséquent, le lemme de Ito¹ permet de fournir une expression développée de la variation $dF_1(V, t)$ de la valeur du portefeuille constitué par le capital-risque :

$$dF_1(V, t) = \pi(V, t)dt + \frac{\partial F_1}{\partial t}dt + \frac{\partial F_1}{\partial V}dV + \frac{1}{2} \frac{d^2 F_1}{dV^2} (dV)^2$$

Or,

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz$$

et

$$(dV)^2 = (\alpha V dt + \sigma V dz)^2 = \sigma^2 V^2 dt$$

Car $(dt)^2 = 0$; $dz dt = 0$ et $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$

d'où

$$dF_1(V, t) = \left[\pi(V, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \alpha V \frac{\partial F_1}{\partial V} + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{d^2 F_1}{dV^2} \right] dt + \sigma V \frac{\partial F_1}{\partial V} dz \quad (1)$$

La fonction $dF_1(V, t)$ obtenue, présente la manière dont varie (instantanément) la valeur du portefeuille donc, l'option réelle représentant le projet industriel. Les informations (à la fois techniques, financières et commerciales) que le décideur détient au moment de son intervention, se déclinent en termes d'un retour financier potentiel, et participent ainsi à la construction de ce portefeuille. L'étude préalable du projet (qui s'appuie sur des critères techniques, financiers et commerciaux de faisabilité), représente alors la première étape qui conduit à l'acceptation (ou non) du financement du projet par l'opérateur. Cette étape d'expertise franchie, le capital-risque va devoir transformer cet investissement risqué, en une proposition de placement « au moindre risque » pour les bailleurs de fonds.

3.2. La gestion financière du projet

Ce second volet repose sur la gestion éminemment financière de ce portefeuille ; il contient divers types de titres (risqués et non risqués), et l'évolution de son montant va dépendre de la fluctuation de chacun d'eux. Pour commencer, le capital-risque se trouve donc avec deux sortes de titres de type obligataire : Le premier, l'emprunt réalisé auprès des bailleurs de fonds, pour un montant I_1 et qui, en schématisant, se présente sous la forme d'obligations « zéro coupons », remboursables à l'échéance de l'opération. Le second, résulte de l'investissement I_1 dans le projet qui prend la forme d'obligations convertibles, émises par les dirigeants de la start-up, et dont le montant en portefeuille pour le capital-risque s'élève à $B(V_t)$ lorsque la valeur du projet atteint le niveau V_t .

Par conséquent, la différence entre le portefeuille obligataire (détenu à l'actif par l'opérateur) et les obligations zéro-coupons émises via les bailleurs de fonds (au passif,) s'écrit :

$\phi(V_t) = B(V_t) - I_1$ Cette expression correspond donc à la dette nette du capital-risque, lorsque le projet atteint la valeur V_t . Et, d'après cette relation, l'expression $\phi(V_t)$ représente également la valeur des obligations déjà converties (en action ou négociées), pour un montant V_t du projet. La somme ainsi dégagée sera alors affectée à la gestion globale du projet (achat de titres et rémunération du prêt obligataire). Or, le portefeuille répliquant est constitué de titres risqués ($n_t V_t$) ainsi que de titres non risqués ($\phi(V_t)$) ; donc par définition :

¹ Pour un développement plus rigoureux, concernant ces processus : Lamberton D. Lapeyre B. [1997] Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. Ellipse Paris (2^o édition).

$$F_2(V_t) = n_t V_t + \phi(V_t) \Leftrightarrow \phi(V_t) = F_2(V_t) - n_t V_t$$

Ce qui implique alors que :

$$dF_2(V_t) = d\phi(V_t) + d(n_t V_t) \Leftrightarrow d\phi(V_t) = dF_2(V_t) - (n_t d(V_t) + V_t d(n_t))$$

Or, dans la décomposition de la variation globale du portefeuille risqué :

$$d(n_t V_t) = V_t dn_t + n_t dV_t ;$$

les deux termes du second membre n'occupent pas la même place dans le modèle :

$n_t dV_t$ représente la variation de la valeur du projet pour n donné, qui résulte seulement d'une modification exogène de la valeur dV_t du projet ;

$V_t dn_t$ exprime la variation du niveau d'implication de l'opérateur dans le projet, qui résulte exclusivement d'une modification dn_t du nombre de titres en portefeuille.

L'accroissement global de la valeur du portefeuille risqué $d(n_t V_t)$ peut ainsi se décomposer comme la somme d'une augmentation de la valeur intrinsèque du projet, plus l'augmentation de la participation de l'opérateur (selon le nombre de titres détenus). Dans ces conditions, la variation de la valeur du portefeuille répliquant, induit une variation d'un même montant de ses emplois, et cela de manière continue (selon les hypothèses). En posant que ρ représente le taux d'intérêt sans risque ; le flux net de rémunération sans risque versé sur l'intervalle dt s'écrit :

$$dr_1 = \rho \phi dt ; \text{ avec : } dr_1 < 0 \text{ car } \phi < 0$$

Dans ces conditions, dr_1 s'interprète ici comme la variation instantanée des frais nets liés à la gestion financière du portefeuille sans risque.

Remarque : La présentation de la gestion des titres obligataires en portefeuille, a permis de montrer que le besoin net de financement de l'opérateur pour le projet ($\phi(V_t)$ à la date t), résulte de la différence entre l'emprunt (obligataire) qu'il réalise auprès des bailleurs de fonds, et des moyens financiers apportés au projet (sous la forme d'obligations convertibles). Dans ces conditions, en appelant $(\rho_{I_1} dt)$ le coût instantané de l'émission d'obligations (« zéro-coupons ») auprès du bailleur de fonds, et $(\rho_B dt)$ le rendement instantané des obligations en portefeuille sur le projet, il vient :

$$\rho \phi dt = (\rho_B B - \rho_{I_1} I_1) dt \Leftrightarrow \rho = \frac{\rho_B B - \rho_{I_1} I_1}{B - I_1} dt \quad \text{avec : } \rho_B \leq \rho_{I_1}$$

Cette dernière inégalité pose que le coupon servi sur les obligations convertibles se situe à un moindre niveau que celui figurant sur les obligations pures (que sont sensés représenter les titres émis par le capital-risque). Par conséquent, le taux d'intérêt instantané sans risque (ρ) s'interprète ici comme une moyenne pondérée du rendement des obligations (convertibles) détenues en portefeuille par l'opérateur, et de la rémunération (garantie) versée aux bailleurs de fonds. Étant donné que le portefeuille B_t varie continûment, il en sera de même pour le taux ρ tel qu'il vient d'être posé. Par conséquent, afin de simplifier la présentation qui suit, les deux taux seront posés égaux ($\rho_B = \rho_{I_1} = \rho$) au taux d'intérêt sans risque.

De plus, si δ représente le taux de reversement des dividendes sur les actifs risqués, et détenus par l'opérateur, la variation de cette part de rémunération du portefeuille devient :

$$dr_2 = \delta n V dt \text{ avec : } dr_2 \geq 0$$

Le gestionnaire de fonds pourra également bénéficier du gain net de la valeur en capital :

$$dr_3 = n dV$$

Enfin, l'implication progressive de l'opérateur dans le projet lui permettra d'accroître la valeur de son portefeuille de titres risqués, en finançant les nouvelles actions par la conversion d'obligations (à partir du portefeuille $B(V)$) (en supposant que ces conversions se réalisent au prix courant de l'action, donné par la valeur V du projet¹) :

$$dr_4 = V dn \quad \text{avec : } dr_4 \geq 0$$

Dans ces conditions, il devient possible d'expliciter la variation des besoins en financement pour le projet :

$$d\phi = \rho \phi dt + \delta n V dt - V dn \quad (2)$$

Ce qui signifie que la variation instantanée des besoins de financement pour l'opération, se présente comme la somme de la rémunération nette (au taux sans risque ρ) versée au bailleur de fond, de la rémunération de la position courte au travers des dividendes perçus sur les actifs risqués et, enfin, diminuée de l'achat de nouveaux titres (sous la forme de conversion d'une partie des obligations). Dans ces conditions, l'expression $d\phi$ se révèle négative, ce qui traduit qu'au fur et à mesure que mûrit le projet, le portefeuille d'obligations (détenu par l'opérateur) se réduit. Par conséquent, la variation du portefeuille constitué dans le cadre de la gestion du projet devient :

$$dF_2(V) = d\phi + d(nV) = d\phi + n dV + V dn$$

Ce qui permet d'exprimer la valeur de l'option liée au projet :

$$dF_2(V) = \rho \phi dt + \delta n V dt - V dn + n dV + V dn$$

Ce qui conduit au résultat :

$$dF_2(V) = \rho \phi dt + \delta n V dt + n dV \quad (3)$$

Les relations (2) et (3) conduisent à poser le système de deux équations :

$$\begin{cases} d\phi &= \rho \phi dt + \delta n V dt - V dn \\ dF(V) &= \rho \phi dt + \delta n V dt + n dV \end{cases}$$

Et donc bien de retrouver que :

$$d\phi = dF(V) - d(nV)$$

Ces relations résument les diverses opérations menées par le capital-risque, qui chronologiquement s'étalent de la manière suivante, pour la première relation : Le montant I_1 est emprunté par l'opérateur, aux bailleurs de fonds, dès l'origine du processus, sous la forme par exemple d'obligation « zéro-coupon ». Ce montant est ensuite entièrement investi dans le projet sous la forme d'obligations convertibles. Au fur et à mesure qu'évolue le projet, l'opérateur convertit son portefeuille d'obligations en actions, en même temps qu'il provisionne le montant net de l'emprunt obligataire ($\rho \phi dt$), mais il perçoit aussi le rendement de la position courte ($\delta n V dt$), liée à la détention des actifs risqués.

La seconde relation du système met en évidence le processus de valorisation du portefeuille répliquant, constitué par l'opérateur. Pour un niveau donné (n) de participation dans le projet, la valorisation du portefeuille risqué est fonction de la variation $n dV(t)$ de la valeur du

¹ Il serait également possible de décomposer l'obligation convertible en la somme d'une obligation pure (avec un rendement instantané de $\rho B dt$ et d'une option d'achat sur les actions, avec un prix contractuel d'exercice V). Ce qui représente une autre manière de formaliser l'idée d'obligation convertible.

projet. La variation (instantanée) du portefeuille répliquant se présente comme la conséquence des fluctuations du portefeuille risqué ($n dV(t)$), plus la variation de rémunération générée par la détention de titres risqués ($\delta n V dt$), plus la variation nette des frais financiers liés à l'emprunt initial ($\rho \phi dt$).

Au final, les bailleurs de fonds percevront le montant I_1 avancé et (au minimum) les intérêts convenus sur la durée de vie du titre (obligations « zéro coupon »). Dans la relation (3), en posant $\phi(V) = F(V) - nV$ il vient alors :

$$dF_2(V, t) = \rho(F_2(V, t) - nV)dt + \delta n V dt + n dV$$

Et, puisque dV suit un mouvement brownien géométrique (α, σ) :

$$dF_2(V, t) = [(\alpha + \delta - \rho)nV + \rho F_2(V, t)]dt + n\sigma V dz \quad (4)$$

Les deux portefeuilles $F_1(V_t)$ et $F_2(V_t)$ étant supposés identiques, ils subiront les mêmes variations :

$$dF_1 = dF_2 = dF$$

Ce qui, à partir des relations (1) et (4), se traduit par :

$$\left[\pi(V, t) + \frac{\partial F}{\partial t} + \alpha V \frac{\partial F}{\partial V} + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{d^2 F}{dV^2} \right] dt + \sigma V \frac{\partial F}{\partial V} dz = [(\alpha + \delta - \rho)nV + \rho F(V, t)]dt + n\sigma V dz$$

Notamment les parties, stochastique (avec risque) et déterministe (sans risque) de ces portefeuilles, seront égales :

$$\begin{cases} \pi(V, t) + \frac{\partial F}{\partial t} + \alpha V \frac{\partial F}{\partial V} + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{d^2 F}{dV^2} & = (\alpha + \delta - \rho)nV + \rho F(V, t) \\ \sigma V \frac{\partial F}{\partial V} & = n\sigma V \end{cases}$$

La seconde équation conduit donc à l'égalité :

$$\frac{\partial F}{\partial V} = n$$

Pour ce qui concerne la première, en supposant une maturité infinie¹ pour l'option, cela implique que :

$$\frac{\partial F(V)}{\partial t} = 0$$

Ces propriétés, reportées dans la première équation, permettent d'écrire, en négligeant $\pi(V, t)$ dans le cadre d'un projet innovant :

$$\pi(V, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{d^2 F}{dV^2} + (\rho - \delta)V \frac{dF}{dV} - \rho F = 0 \quad (5)$$

La relation (5) représente une équation différentielle du second ordre, dont la résolution permettra d'exprimer la valeur de l'option, en fonction de l'évolution de la valeur du sous-

¹ La notion de maturité infinie permet de simplifier grandement la résolution l'équation, en rendant le problème indépendant de la variation du temps. Ainsi, en posant $F(V, t, T)$ la valeur du portefeuille répliquant, pour une valeur V du projet, à une date t avec une arrivée à maturité à la date T . si $T \rightarrow \infty$ un changement d'origine sur l'axe du temps ne modifie pas la valeur de l'option ce qui se traduit par : $\forall \Delta > 0 ; F(V, (t + \Delta), T) = F(V, t, T)$. Une translation sur l'axe du temps ne modifie pas la valeur du portefeuille. Donc $F(V)$ ne dépend que de V , même si, une fois fixée la date d'intervention, V dépend de t .

jacent (le projet). L'équation (5) se conforme à une équation d'Euler Cauchy, qui admet comme solution¹ une expression du type :

$$F(V) = K V^\beta$$

Avec comme équation caractéristique :

$$\beta(\beta - 1) + \frac{2(\rho - \delta)}{\sigma^2}\beta - \frac{2\rho}{\sigma^2} = 0 \Leftrightarrow \beta^2 + \frac{2(\rho - \delta) - \sigma^2}{\sigma^2}\beta - \frac{2\rho}{\sigma^2} = 0$$

La résolution de cette équation met en évidence deux racines réelles et distinctes en β et en ne retenant que la racine positive, il vient :

$$\beta_1 = \frac{(\sigma^2 - 2(\rho - \delta)) + \sqrt{(\sigma^2 - 2(\rho - \delta))^2 + 8\rho\sigma^2}}{2\sigma^2}$$

Enfin, les conditions de « *Value matching* » et de « *Smooth pasting* » données par Dixit et Pindyck², permettent de poursuivre l'évaluation des paramètres retenus. En effet, le retrait du capital-risque correspond à une vente des actifs de la firme à la date t_2 et au prix d'exercice $\Omega(V, t_2)$. A cette date, la valeur du projet aura atteint un niveau V_2 correspondant à une reconnaissance explicite de la viabilité industrielle de l'entreprise (selon les critères industriels de rentabilité, sur les marchés financiers). Il semble alors que dans un premier temps, une règle évidente, qui préside au retrait du capital-risque, soit donnée par la valeur nette du projet qui égalise celle de l'option réelle³

Ces deux conditions fondent le calcul des valeurs de K_1 et de V_2 . Cela se traduit alors par la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} K_1 V_2^{\beta_1} & = V_2 - I_1 \\ \beta_1 K_1 V_2^{(\beta_1 - 1)} & = 1 \end{cases}$$

La seconde équation conduit à une expression de K_1 en fonction de V_2 :

$$K_1 = \frac{V_2}{\beta_1 V_2^{\beta_1}}$$

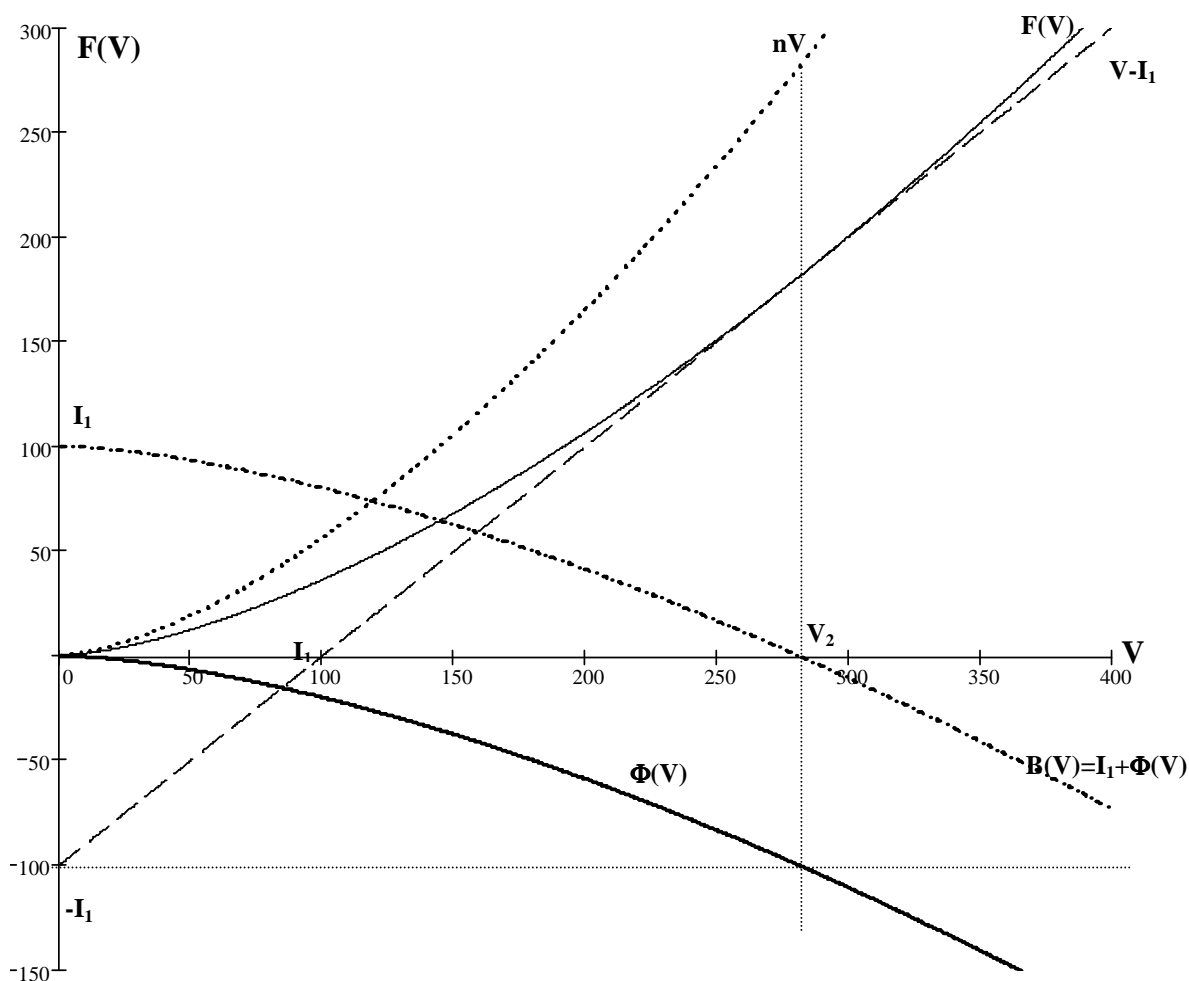
D'où en substituant dans la première équation :

$$V_2 = \frac{\beta_1}{(\beta_1 - 1)} I_1 \quad (6)$$

¹ Seule la solution vérifiant la relation $F(0) = 0$ sera retenue ce qui exclut la valeur négative de la racine de l'équation caractéristique.

² Dixit A. et Pindyck R. [1994] (op. cit.)

³ Il serait ici possible de montrer (cela faisant l'objet d'un second axe de réflexion) que l'opérateur qui désire optimiser son intervention, a intérêt à sortir du projet avant que sa valeur n'atteigne ce seuil. Notamment l'existence d'outils financiers comme les IPO tend à rationaliser encore son intervention, en lui permettant de se rapprocher du niveau efficient de sortie.



Graphique I

Représentation des instruments de gestion pour le capital-risque, en fonction de la valeur du projet

La valeur V_2 considérée comme celle de retrait du capital-risque, dépend d'abord du montant total investi (I_1). La valeur pour laquelle le capital-risque se retirera de l'opération est supérieure au total des investissements engagés (car $\beta_1 > 1$). Et d'après les deux relations précédentes, il vient :

$$K_1 = \frac{(\beta_1 - 1)^{\beta_1 - 1}}{\beta_1^{\beta_1} (I_1)^{\beta_1 - 1}} \quad (7)$$

Plus généralement, la valeur de l'option réelle, en fonction de celle du projet devient :

$$F(V) = K_1 V^{\beta_1} = \frac{(\beta_1 - 1)^{\beta_1 - 1}}{\beta_1^{\beta_1} (I_1)^{\beta_1 - 1}} V^{\beta_1}$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$F(V_2) = \frac{I_1}{(\beta_1 - 1)}$$

Ces résultats conduisent à une représentation graphique de ces fonctions en posant notamment :

$$nV = \frac{dF(V)}{dV} V = \beta_1 K_1 V^{(\beta_1 - 1)} = \beta_1 F(V) = \left(\frac{(\beta_1 - 1)}{\beta_1 I_1} \right)^{\beta_1 - 1} V^{\beta_1}$$

$$\phi(V) = F(V) - nV = (1 - \beta_1)F(V)$$

$$B(V) = \phi(V) + I_1$$

La fonction $F(V)$ comme les trois autres représentées ci-dessus, se retrouvent sur le graphique I, obtenu pour les valeurs suivantes des paramètres¹ : $\rho = 0,1$, $\delta = 0,08$, $\sigma = 0,4$, ce qui implique donc que $\beta_1 = 1,55$. De plus, le taux de croissance attendu du projet s'élève à : $\alpha = 0,75$, avec $I_1 = 100$.

La démarche maintenant classique, adoptée dans cette première partie, conduit à une adaptation des modèles d'option réelle à la question de la gestion par le capital-risque. Il ressort ainsi un ensemble de résultats conformes à ceux obtenus dans les travaux sur les options réelles, mais qui débouchent sur des interprétations spécifiques à la gestion financière d'un projet innovant. Notamment, il pose de manière claire la place centrale occupée par les titres hybrides dans la gestion financière du projet, afin de limiter les risques par la construction de portefeuilles adéquats.

4. Le risque et le temps

Si les expertises menées dans le cadre de l'évaluation du projet, déterminent les conditions d'entrée, elles indiquent également la potentialité (technique, commerciale, etc...) de l'innovation. Les informations ainsi recueillies fondent la première étape d'un programme de valorisation du projet (business-plan), qui participent à la construction *a priori* d'une espérance mathématique concernant la valeur future de l'opération. Le prolongement des résultats qui précèdent, conduit à faire dépendre les variables introduites, non plus de la seule valeur de projet, mais de la manière dont cette dernière se construit et évolue dans le temps.

4.1. Quelques conséquences sur le modèle de l'introduction du temps

En posant que la valeur du projet suit un mouvement brownien géométrique, il est possible de montrer que l'expression :

$$V_t = V_0 e^{\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma z_t \right)}$$

est bien une solution de l'équation différentielle² :

$$dV_t = \alpha V_t dt + \sigma V_t dz_t \quad (8)$$

Le processus stochastique, défini par la relation (8), permet d'actualiser à l'origine la valeur du projet. En considérant pour simplifier que le taux d'actualisation est égal au taux d'intérêt sans risque (ρ), le facteur d'actualisation g_t s'exprime par : $g_t = e^{-\rho t}$. Ce qui s'écrit également :

$$\frac{dg_t}{dt} = -\rho e^{-\rho t} = -\rho g_t$$

¹ Ces valeurs se retrouveront dans toutes les représentations graphiques qui suivent, ce qui permettra de leur conserver une référence commune, notamment afin de comparer les résultats obtenus.

² La démonstration figure dans l'annexe I.

Le processus défini à partir de $\{g_t = e^{-\rho t} ; t \geq 0\}$ est alors un processus de Ito qui satisfait à l'équation différentielle :

$$dg_t = -\rho g_t dt$$

Or, le processus $\bar{V}_0 = g V$ représente l'évolution de la valeur du projet, actualisée à l'origine, ce qui conduit à la relation :

$$dV_t = d(g_t V_t) = g_t dV_t + V_t dg_t$$

ou encore, d'après la relation (8) :

$$dV_t = g_t (\alpha V_t dt + \sigma V_t dz_t) - V_t (\rho g_t dt)$$

d'où :

$$dV_t = (\alpha - \rho) g_t V_t dt + \sigma V_t dz_t = (\alpha - \rho) V_t dt + \sigma V_t dz_t$$

Ce qui, en revenant à l'expression de l'espérance mathématique¹, conduit au résultat :

$$E[V_t] = V_0 e^{(\alpha - \rho)t} \quad (9)$$

Expression de l'espérance mathématique de la valeur actualisée du projet

Enfin, le nombre de titres risqués détenus (participation de l'opérateur dans le projet à la date t^2), est ici supposé évoluer de manière exponentielle avec le temps ; cela se traduit par :

$$n(t) = h_0 e^{h_1 t} \Leftrightarrow dn = n h_1 dt$$

Le coefficient h_0 représente le niveau de la participation du capital-risque au moment où il apparaît dans le projet (en supposant que l'entrée de l'opérateur dans le projet se manifeste par une participation a minima en terme d'actions). Cette relation s'exprime également par :

$$\frac{dn}{dt} = h_1 n(t)$$

Par conséquent, en admettant que la variation des disponibilités financières (représentées ici par le portefeuille sans risque ϕ_t), se retrouve entièrement affectée à l'achat d'actifs risqués sur le projet (donc que les frais et produits financiers n'affectent pas cette variation), les résultats obtenus antérieurement deviennent :

$$n = \frac{dF(V)}{dV} = \beta_1 \frac{K_0}{V_0} e^{(\beta_1 - 1)(\alpha - \rho)t}$$

Cela implique donc :

$$\frac{dn}{dt} = (\alpha - \rho)(\beta_1 - 1)\beta_1 \frac{K_0}{V_0} e^{(\beta_1 - 1)(\alpha - \rho)t} = (\alpha - \rho)(\beta_1 - 1)n(t)$$

Par conséquent, en revenant à la fonction $n(t)$ définie ci-dessus, cela permet d'obtenir les valeurs de h_1 et h_0 :

$$h_1 = (\alpha - \rho)(\beta_1 - 1) \quad (10)$$

Ce qui signifie que la variation instantanée du nombre de titres risqués, gérés par l'opérateur, est égal au taux de croissance de la valeur (α), du portefeuille sans risque, corrigé du taux ρ d'actualisation (supposé égal au taux d'intérêt sans risque). En outre :

$$h_0 = \beta_1 \frac{K_0}{V_0}$$

¹ cf Annexe I

² Il sera en fait admis qu'il s'agit de la part détenue, par rapport à un objectif de participation qui s'exprimerait par : $n = 1$.

Ainsi, pour chaque valeur de ρ , δ et σ donc pour un β_1 donné, il apparaît une valeur unique de h_1 qui, pour une quantité $n(t)$ de titres déjà en portefeuille, représente le taux instantané de variation de la participation (sous forme de titres risqués) de l'opérateur dans le projet. Cette expression se conforme parfaitement aux contraintes imposées au nombre $n(t)$ de titres risqués en portefeuille ; notamment pour $t = t_2$. En effet, d'après les résultats précédents :

$$n(t) = \beta_1 \frac{K_0}{V_0} e^{(\beta_1 - 1)(\alpha - \rho)t} = \left(\frac{(\beta_1 - 1)}{\beta_1 (I)} (V_t) \right)^{(\beta_1 - 1)}$$

Et en se rappelant que $V_2 = \frac{\beta_1 I}{\beta_1 - 1}$ alors $n(t_2) = 1$

Le nombre de titres risqué en portefeuille à une date t permet alors de définir la variation instantanée de la valeur de ce portefeuille :

$$V_t dn_t = V_t h_1 n_t dt = \beta_1 h_1 F(V_t) dt = \beta_1 (\alpha - \rho) \phi_t dt$$

Pour conclure, la relation ci-dessus permet de retrouver l'équilibre entre les emplois et les ressources, posé précédemment. La variation (instantanée) des titres risqués en portefeuille ($V_t dn_t$), égalise celle de la conversion nette d'obligations ($d\phi_t$) ; en effet, en reprenant la définition du portefeuille sans risque ϕ_t et la forme développée de la fonction $F(V_t)$:

$$\frac{d\phi_t}{dt} = \beta_1 (\alpha - \rho) (1 - \beta_1) F(V_t) \Rightarrow d\phi_t = \beta_1 h_1 F(V_t) dt = V_t dn_t$$

Le coefficient h_1 représente donc à la fois la variation instantanée du nombre d'obligations converties, et (par conséquent) la variation instantanée de la valeur du portefeuille risqué, acquis par conversion d'obligations.

4.2. L'introduction de la gestion financière du projet.

L'introduction des produits financiers (rendement des titres risqués détenus), dans le cadre de la gestion du projet, tend à modifier sensiblement la présentation antérieure. En effet, le portefeuille sans risque (ϕ_t) se construit *a priori*, pour répondre aux critères d'efficience du portefeuille répliquant $F(V_t)$ constitué par l'opérateur. Dans ces conditions, les frais et les produits financiers (s'il y a lieu) affecteront le montant de ce portefeuille, et influenceront sur le niveau d'acquisition de titres risqués (A_t)¹. Cette remarque permet donc de réécrire la variation instantanée des dépenses affectées à l'achat de nouveaux titres risqués, qui se distingue donc de la stricte conversion d'obligations en actions :

$$dA_t = V_t dn_t = h_1 n_t V_t dt = h_1 n_t V_t dt + (\delta\beta_1 - \rho(\beta_1 - 1))F(V_t)dt$$

Ce qui revient simplement à poser que la variation instantanée des achats de titres risqués est égale à la variation des obligations converties ($h_1 n_t V_t dt$), plus les produits et frais financiers nets, attachés à l'opération, et réinvestis dans l'opération. Ce qui s'écrit également :

$$dA_t = h_1 n_t V_t dt = (h_1 \beta_1 + (\delta\beta_1 - \rho(\beta_1 - 1)))F(V_t)dt$$

¹ Cette influence peut s'opérer selon deux processus : Le premier consiste à reporter directement les produits financiers sur l'achat de titres risqués ; le second amène l'opérateur à provisionner ces frais afin qu'ils participent au remboursement de l'emprunt obligataire (« zéro coupons ») à l'issue de l'opération. Les deux cas se rejoignent *in fine*, la provision constituée à partir des produits financiers allège les intérêts sur l'emprunt réalisé auprès des bailleurs de fonds.

La variation instantanée de titres risqués achetés devient ainsi une proportion h de la valeur du projet ou, une part $\beta_1 h$ de la valeur du portefeuille répliquant. Ce qui revient donc à écrire :

$$h n_t V_t = \left((\alpha - \rho)(\beta_1 - 1)\beta_1 - \rho(\beta_1 - 1) + \delta\beta_1 \right) \frac{n_t V_t}{\beta_1}$$

Et après simplifications il vient :

$$h = \left((\beta_1 - 1)(\alpha - \rho) + \rho \frac{1 - \beta_1}{\beta_1} + \delta \right) \quad (11)$$

La relation (11) conduit donc à une identification de la variation de l'achat de titres risqués par l'opérateur. Le capital-risque convertit un montant $d\phi_t$ d'obligations qu'il utilise d'une part, pour rémunérer les intérêts de l'emprunt contracté et, d'autre part, pour acheter de nouvelles actions avec le solde ; les produits financiers viennent éventuellement s'ajouter à cet ensemble. Ce qui conduit à l'expression du taux de variation du nombre de titres achetés :

$$h = (h_1 + h_2) \text{ avec } h_2 = \rho \frac{1 - \beta_1}{\beta_1} + \delta \quad (11')$$

Par conséquent, $dn_t = h n_t dt$ s'interprète comme la variation (instantanée) du nombre de titres risqués en portefeuille, elle se décompose en deux parties identifiables :

La première $h_1 n_t dt$ représente la variation (instantanée), exprimée en nombre de titres sur le projet, qui découlerait de l'affectation intégrale de la conversion d'obligations en l'achat de titres.

La seconde $h_2 n_t dt$ la variation des résultats de la gestion financière se rapportant au projet. d'après la relation (11), ce processus de conversion et d'achat de titres risqués s'étale selon trois étapes :

$$A_t = \underbrace{(\beta_1 - 1)(\alpha - \rho)n_t V_t}_{\substack{\text{Conversion d'obligations:} \\ h_1 n_t V_t}} - \underbrace{\rho(\beta_1 - 1)(F(V_t))}_{\substack{\text{Mon tant de la conversion} \\ \text{disponible pour l'achat de titres}}} + \underbrace{\delta n_t V_t}_{\substack{\text{Achat global de titres incluant les produits financiers} \\ (h_1 + h_2)n_t V_t}}$$

Au total, la conversion d'obligations, corrigée des frais ou produits financiers, liés à la gestion du projet, débouche sur une évaluation du nombre de titres risqués en portefeuille. Or, la prise en compte des charges et produits financiers, sur les titres risqués détenus, tend à en modifier le rythme d'achat. Ce résultat s'inscrit alors dans le prolongement la notion de stratégie autofinçante¹, une hypothèse fondamentale dans le cadre de ces modèles, en supposant que les produits financiers (issus des dividendes perçus) viennent en déduction des frais occasionnés par l'emprunt obligataire. Dans ces conditions, la prise en considération de la gestion financière de l'opération, revient à modifier le rythme de conversion des obligations en actions.

Si $h_2 \geq 0$ alors $\rho \frac{1 - \beta_1}{\beta_1} + \delta \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\rho - \delta}{\rho} \leq \frac{1}{\beta_1}$; par conséquent, si le taux de rémunération des titres risqués se révèle suffisamment proche du taux d'intérêt sans risque,

¹ Une stratégie autofinçante peut être définie comme l'impossibilité pour l'opérateur de se procurer des ressources financières extérieures (en dehors de l'investissement initial I_1) ou de financer d'autres activités à partir des ressources financières dégagées par le projet. Une fois l'opérateur engagé dans le projet, cette stratégie postule qu'il devra évoluer sans échange financier avec l'extérieur.

alors le rythme des achats de titres risqués dépassera celui des seules conversions d'obligations : $h \geq h_1$ ce qui implique, en valeur absolue : $|dA_t| \geq h_1 n_t dt$

Si $h_2 < 0$ alors, $\rho \frac{1-\beta_1}{\beta_1} + \delta < 0 \Leftrightarrow \frac{\rho - \delta}{\rho} > \frac{1}{\beta_1}$; par conséquent, si l'écart relatif

entre le taux d'intérêt sans risque et les dividendes perçus se révèle suffisamment important, alors le rythme de conversion des obligations excèdera celui des achats de titres risqués : $h < h_1$ ce qui implique : $|dA_t| < h_1 n_t dt$ (la différence étant absorbée par les frais financiers).

Le rythme d'achat de titres risqués dépend ainsi des résultats de la gestion financière ; il peut dépasser celui de la conversion des obligations en titres risqués si un excédent financier apparaît.

La société de capital-risque s'engage donc maintenant dans l'opération qui consiste à gérer un placement dans un projet à risque, tout en présentant des garanties de rendement auprès de bailleurs de fonds. Cela revient donc, pour l'opérateur, à assurer une certaine rentabilité pour les placements qui lui sont confiés. Le processus de transformation financière ainsi décrit, se réalise en couplant l'investissement dans un projet risqué, avec un placement non risqué (au taux ρ), dans un portefeuille ($F(V_t)$) rassemblant tous ces actifs. Il s'agit donc pour l'opérateur de réduire le risque à partir d'une gestion diversifiée de portefeuilles. Le montant net de cet emprunt à une date t doit vérifier :

$$\phi_t = F(V_t) - n_t V_t$$

Si, à la date t , A_t représente la valeur des acquisitions en actions, B_t le montant du portefeuille d'obligations détenu sur le projet par le capital-risque, et C_t les charges (ou produits) financières nettes qu'il supporte sur l'opération, l'équilibre emploi ressource conduit à poser :

$$\begin{cases} B_t = I_1 + \phi_t \\ A_t = \phi_t - C_t \end{cases} \Rightarrow A_t = (B_t - I_1) - C_t$$

Où I_1 exprime la valeur de l'investissement réalisé par l'opérateur dans le projet, et donnée *a priori*. La première relation signifie que le montant des obligations (convertibles) détenues en portefeuille à la date t , est égal à l'investissement initial (supposé transformé intégralement en obligations convertibles), moins les conversions déjà opérées à cette date. La seconde relation exprime les dépenses affectées à l'achat net d'actions à la date t (portefeuille de titres risqués de l'opérateur à cette date), comme la somme du montant global libéré par la conversion d'obligations, et des produits (ou des frais) financiers.

Ces deux relations débouchent sur une double interprétation du portefeuille sans risque ϕ_t :

$$\begin{cases} \phi_t = B_t - I_1 \\ \phi_t = A_t + C_t \end{cases}$$

La première révèle les ressources financières de l'opérateur : le portefeuille sans risque ϕ_t se construit comme la différence entre les obligations émises auprès des bailleurs de fonds (emprunt I_1), et celles encore détenues sur le projet (prêt B_t). Il s'agit donc de la situation financière nette, concernant le portefeuille obligataire de l'opérateur.

La seconde exprime l'emploi de ces ressources financières, afin de soutenir le projet : le portefeuille sans risque ϕ_t sert donc à l'achat de titres risqués (pour un montant A_t), et à couvrir les frais financiers liés à l'opération (C_t)

Les résultats qui précèdent permettent alors de retrouver l'expression de la variation instantanée du portefeuille sans risque, obtenue dans la relation (2) :

$$d\phi_t = dA_t + dC_t \Leftrightarrow d\phi_t = \underbrace{\rho\phi_t dt + \delta n_t V_t dt}_{dC_t} - \underbrace{V_t dn_t}_{dA_t} \quad (12)$$

Il apparaît, dans la relation ci-dessus, que le mouvement de conversion des obligations ($d\phi_t$) se distingue de la variation instantanée du portefeuille de titres risqués (dA_t), puisqu'elle prend également en compte la variation des résultats de la gestion financière de l'opération. (dC_t). La variation de la valeur des titres achetés à la date t devient :

$$dA_t = d\phi_t - dC_t \Leftrightarrow dA_t = d\phi_t - (\rho\phi_t + \delta\beta_1 F(V_t))dt$$

La relation ci-dessus devient donc :

$$d\phi_t = \rho\phi_t dt + \delta\beta_1 F(V_t)dt - h\beta_1 F(V_t)dt$$

En posant que $\phi_0 = F(V_0) - n_0 V_0$ la résolution de cette équation¹ différentielle conduit au résultat :

$$\phi_t = \frac{K_0}{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho} (\delta - h)\beta_1 e^{\beta_1(\alpha - \rho)t} \quad (13)$$

Ou, d'après la relation (11') :

$$\phi_t = \frac{K_0}{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho} (\rho(\beta_1 - 1) - \beta_1 h_1) e^{\beta_1(\alpha - \rho)t} \quad (14)$$

Cette dernière relation (14) indique donc que le montant des obligations effectivement converties est égal à la valeur des titres en portefeuille ($h_1 \beta_1 F(V)$), moins les frais financiers mobilisés pour rémunérer l'emprunt net ($\rho(\beta_1 - 1)F(V)$). Le montant des obligations converties ne dépend pas du rendement des titres risqués (δ), puisque les dividendes perçus n'entrent pas dans le processus de conversion (guidé seulement par la gestion efficiente du portefeuille $F(V)$) ; ils viennent seulement s'ajouter aux achats de titres (le cas échéant). Par conséquent, selon la première égalité (13), le montant effectif de la conversion des obligations en action, à la date t (ϕ_t), est égal à la valeur totale des achats nets en actions, diminuée des flux de dividendes directement investis dans le projet, à cette date.

Dans les deux cas, ces valeurs se trouvent pondérées par un coefficient : $\frac{1}{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho}$

Dans ces conditions, les achats de titres risqués à la date t (A_t) se composent de la somme nette (hors frais financiers) des obligations converties, plus les flux issus des dividendes et directement investis. Ce qui s'exprime par la relation :

$$A_t = \frac{-h\beta_1}{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho} K_0 e^{\beta_1(\alpha - \rho)t} = \frac{-h_1\beta_1 + \rho(\beta_1 - 1) - \delta\beta_1}{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho} K_0 e^{\beta_1(\alpha - \rho)t} \quad (15)$$

D'où, en se rappelant que : $\phi_t = (1 - \beta_1)K_0 e^{\beta_1(\alpha - \rho)t}$ permet de retrouver :

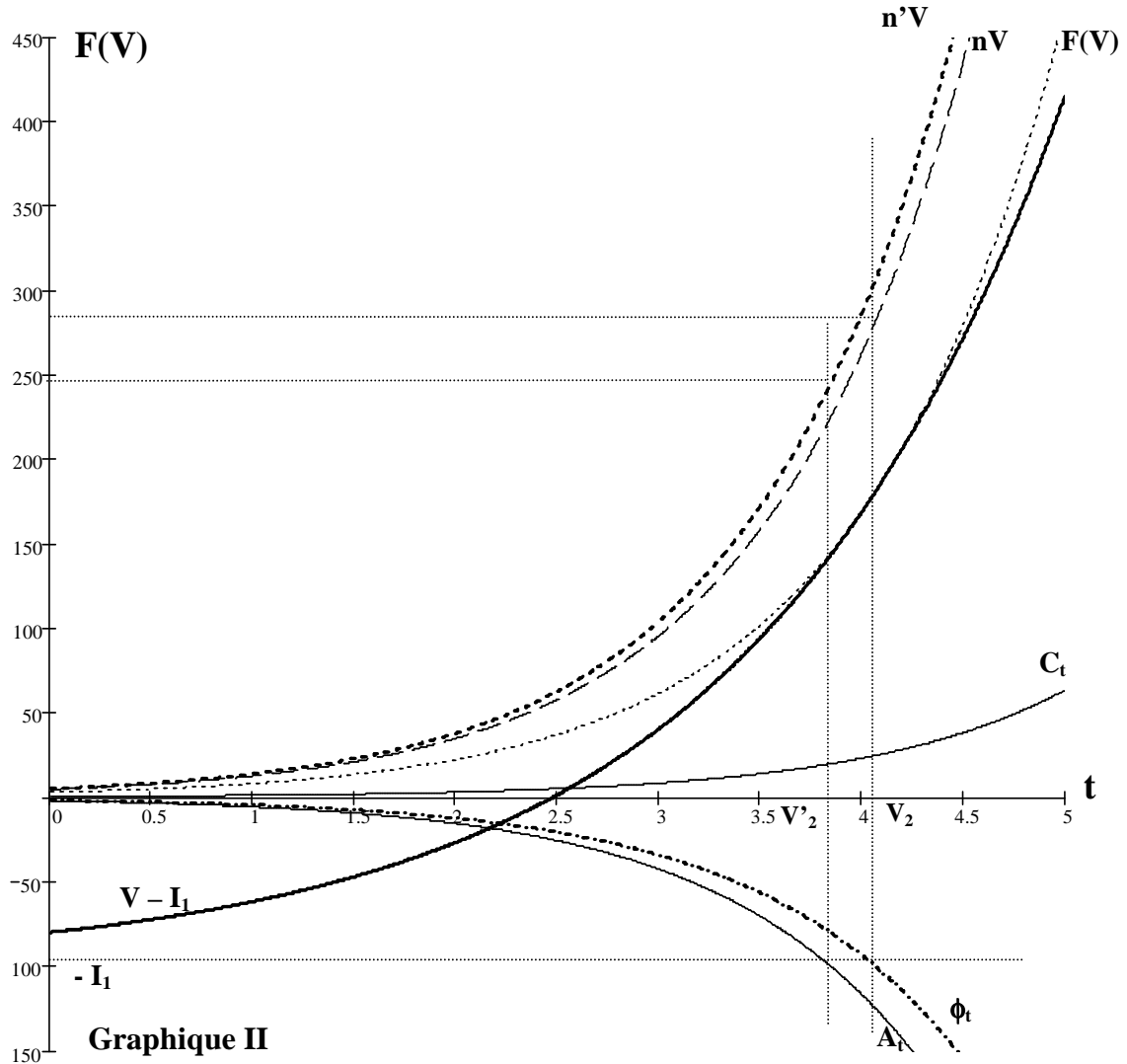
$$A_t = \phi_t - \frac{\delta\beta_1}{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho} K_0 e^{\beta_1(\alpha - \rho)t} \quad \text{avec} \quad \phi_t < 0 \quad (15')$$

Globalement, le montant des titres risqués en portefeuille, diffèrera des disponibilités en obligations convertibles (relation (15')). Si n_t représente le nombre de titres risqués, détenus à la date t, par la seule conversion des obligations (moins les intérêts de l'emprunt), et n_t' la taille de ce même portefeuille, en incluant les produits financiers (dividendes) liés au projet.

¹ La démonstration figure à l'annexe III

Par conséquent l'écart entre la valeur des titres risqués en portefeuille et la conversion effective d'obligations, permet bien de retrouver les propriétés décrites précédemment :

$$\Delta_t = \phi_t - A_t = \frac{\delta\beta_1}{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho} F(V_t) \quad (16)$$



Évolution des principaux critères de gestion pour le capital-risque.

Dans ces conditions, si n'_t représente le volume de titres effectivement en portefeuille, dans le cas d'un report complet des flux financiers sur l'achat de titres risqués :

$$\Delta_t = n'_t V_t - n_t V_t = (n'_t - n_t) V_t$$

Ce qui, d'après la relation (16) devient :

$$n'_t V_t - n_t V_t = \frac{\delta\beta_1}{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho} F(V_t) \Leftrightarrow n'_t V_t = n_t V_t \left(1 + \frac{\delta}{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho} \right)$$

D'où, si $\delta \geq 0$

$$n'_t = \left(\frac{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho + \delta}{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho} \right) n_t \Rightarrow n'_t \geq n_t \quad (17)$$

La relation (17) implique alors que, pour une valeur δ positive, l'objectif ($n_t' = 1$) sera atteint avant que ne soient établies les conditions de sortie de l'opérateur ($F(V_t) = V_t - I_t \Rightarrow n_t = 1$), où la valeur de l'option égale la valeur actualisée nette du projet. Ce résultat met notamment en évidence l'importance du développement précoce de l'activité industrielle du projet, au travers de ses capacités à verser des dividendes aux actionnaires. En fonction de la valeur du taux δ atteint par ces versements, les résultats de l'opération s'en trouvent modifiés. En effet :

$$0 \leq \delta \leq \rho$$

Le rendement des titres risqués est supposé positif (il serait possible de concevoir que ce taux soit négatif dans le cas par exemple d'une recapitalisation par l'opérateur de la société). Le rendement des titres risqués ne saurait excéder le taux d'intérêt sans risque (ρ), car, dans le cas contraire, le principe même de l'intervention du capital-risque, serait remis en question.

Par conséquent, la gestion nette du portefeuille (achat de titres risqués par la conversion d'obligations), inscrite dans la fonction ϕ_t se combine ici avec l'injection des dividendes perçus dans le processus. Le nombre de titres risqués en portefeuille augmente donc à un niveau n_2' ($n_2' > n_2$), ce qui aura pour conséquence d'avancer l'objectif en terme quantitatif pour les titres en portefeuille. Cette réduction des délais peut alors être mise à profit de deux manières par l'opérateur :

Soit il se retire en revendant les titres, et redéploie ses actifs dans d'autres projets. Ce choix signifierait que le contexte lui permet de s'investir, dans de meilleures conditions financières, dans d'autres projets.

Soit il maintient ce niveau de portefeuille ($n = 1$), et compte sur l'évolution de la valeur du projet pour accroître ses plus-values. Dans ce cas, l'opérateur peut être contraint par des objectifs internes de gestion (dictés par les fondateurs) ou par un cadre juridique qui contingente l'entrée dans le capital de l'entreprise. La valeur $n = 1$ représente alors le niveau maximum que peut atteindre la prise de participation. L'opérateur maintiendra son investissement tant que les plus-values attendues, lui procurent un rendement suffisant ou, tant qu'il ne trouve pas d'autres opportunités.

Dans tous les cas, les conditions de sortie du capital-risque, deviennent une question centrale concernant l'alternative présentée ci-dessus. Ce qui remet au premier plan la place des moyens institutionnels et financiers mis en œuvre (IPO par exemple) dans le cadre du processus d'innovation.

Remarque : La relation (17) débouche également sur une autre interprétation du coefficient δ puisque :

$$\frac{n_t' - n_t}{n_t} = \frac{\delta}{\beta_1 (\alpha - \rho) - \rho}$$

Par conséquent, la variation relative du nombre de titres risqués en portefeuille, liée à la réintroduction des produits financiers, est égale au coefficient de rémunération des titres risqués en portefeuille¹.

S'il semble évident de conclure que tout réinvestissement des produits financiers dans l'achat de titres risqués, accroît le volume du portefeuille correspondant, la sensibilité du modèle à la variation de ces taux, conduit à des conclusions beaucoup plus nuancées. Les commentaires qui prolongent ces résultats (partiels), portent essentiellement sur l'influence des taux (intérêt sans risque et rendement des titres) sur le résultat de l'activité du capital-risque. L'opérateur

¹ L'étude de cette fonction est développée dans l'annexe V

exercera son option (vente), soit s'il atteint un volume de titres en portefeuille conforme à son objectif ($n = 1$), soit si la valeur du projet égale celle pour laquelle il devait initialement l'abandonner ($V_t = V_2$), et dégager ainsi la plus-value attendue (si les délais d'intervention sont respectés). En retenant par exemple le premier critère, le capital-risque se retire de l'entreprise à partir du moment où il lui est difficile d'accroître sa participation (au delà de $n = 1$). Dans ce cas :

$$n'_t = 1 \Rightarrow n_s = \left(\frac{\beta_1 (\alpha - \rho) - \rho}{\beta_1 (\alpha - \rho) - \rho + \delta} \right)$$

où n_s représente le volume de titres détenus, en n'alimentant pas leurs achats par les produits financiers, lorsque $n'_t = 1$. Or :

$$n_t = \frac{dF(V_t)}{dV_t} = \left(\frac{(\beta_1 - 1)}{\beta_1 I_1} \right)^{\beta_1 - 1} V_t^{\beta_1 - 1}$$

Des deux relations ci-dessus, il vient :

$$V'_2 = \left(\frac{\beta_1 (\alpha - \rho) - \rho}{\beta_1 (\alpha - \rho) - \rho + \delta} \right)^{\frac{1}{\beta_1 - 1}} \left(\frac{\beta_1 I_1}{(\beta_1 - 1)} \right)$$

Et donc, en posant que V'_2 représente la valeur du projet lorsque le capital-risque atteint son objectif en terme de titres détenus ($n'_2 = 1$) :

$$V'_2 = \left(\frac{\beta_1 (\alpha - \rho) - \rho}{\beta_1 (\alpha - \rho) - \rho + \delta} \right)^{\frac{1}{\beta_1 - 1}} V_2 \Leftrightarrow V'_2 = N_2 V_2$$

Avec :

$$N_2 = (n_s)^{\frac{1}{\beta_1 - 1}} = \frac{V'_2}{V_2}$$

N_2 s'exprime donc comme le rapport entre la valeur de sortie du projet, lorsque les dividendes y sont réinvestis, et cette même valeur en ne prenant en compte que les conversions nettes d'obligations. La valeur atteinte par le projet lors de la sortie de l'opérateur, selon les conditions posées précédemment, sera telle que :

$$V'_2 \leq V_2 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta_1 (\alpha - \rho) - \rho}{\beta_1 (\alpha - \rho) - \rho + \delta} \right)^{\frac{1}{\beta_1 - 1}} \leq 1 \text{ (ou } N_2 \leq 1)$$

Ce qui signifie donc une sortie plus précoce de l'opérateur et cela, pour une valeur moindre de l'entreprise. Par conséquent, un réinvestissement des produits financiers (éventuels) dans le projet, permet d'atteindre cet objectif quantitatif (nombre de titres en portefeuille), mais au dépend des plus-values réalisées (puisque $V'_2 (= N_2 V_2) \leq V_2$).

La gestion de l'opération par le capital-risque s'appuie donc sur les deux taux (ρ et δ), qui jouent un rôle spécifique dans les stratégies retenues. En considérant que la sortie du capital-risque s'effectue lorsque le nombre de titres risqués en portefeuille a atteint son objectif ($n'_2 = 1$), les deux coefficients agissent sur la valeur de sortie de l'opérateur et, par conséquent, sur les plus-values réalisées :

Pour le taux d'intérêt sans risque (ρ), il serait aisé de montrer que :

$$\frac{dN_2}{d\rho} < 0$$

Tout accroissement du taux d'intérêt sans risque réduit la valeur de sortie du projet pour le capital-risque (pour $n_2' = 1$), et donc sa rentabilité globale. En outre, indépendamment des résultats qui précèdent, la possibilité de maintenir l'option, pour un niveau croissant du taux d'intérêt sans risque, se heurte également l'apparition de nouvelles opportunités d'investissement.

Pour le taux de dividendes δ versés aux détenteurs de titres risqués, ses variations vont également affecter le niveau atteint par le projet lors de la sortie de l'opérateur :

$$\frac{dN_2}{d\delta} > 0$$

Toute augmentation des dividendes versés tendra à prolonger la présence du capital-risque, et donc à conforter le montant des plus-values réalisées lors de la revente des titres risqués en portefeuille.

Remarque : La logique de construction des options réelles conduit au résultat :

$$\begin{cases} \frac{dF(V)}{d\rho} > 0 \\ \frac{dF(V)}{d\delta} < 0 \end{cases}$$

Ce qui signifie le sens de variation de la valeur du portefeuille répliquant vient en opposition à celui de la valeur de sortie du projet (pour $n_2' = 1$) ; si par exemple le taux d'intérêt sans risque s'accroît, la valeur V_2 de sortie (pour $n_2 = 1$) augmente, de par l'appréciation du portefeuille répliquant ($F(V_1)$), mais l'écart entre les deux valeurs de sortie (V_2 et V_2') tend également à se creuser.

Par conséquent, le graphique III, illustre clairement les commentaires qui précèdent. Il ressort d'après cette représentation, que pour assurer le maintien du coefficient N_2 donc, d'une valeur V_2' (relativement à V_2) de sortie du projet, tout accroissement du taux d'intérêt doit être compensé par une augmentation de la rentabilité des titres risqués. Et la sensibilité du rendement des titres risqués semble devenir plus importante avec le taux d'intérêt (plus ce dernier augmente et plus il devra être compensé par des dividendes encore plus importants).

Il semble intéressant à ce stade de souligner deux propriétés :

L'expression $V_2 = \left(\frac{\beta_1 I_1}{(\beta_1 - 1)} \right)$ est indépendante du taux de croissance du projet (α), donc

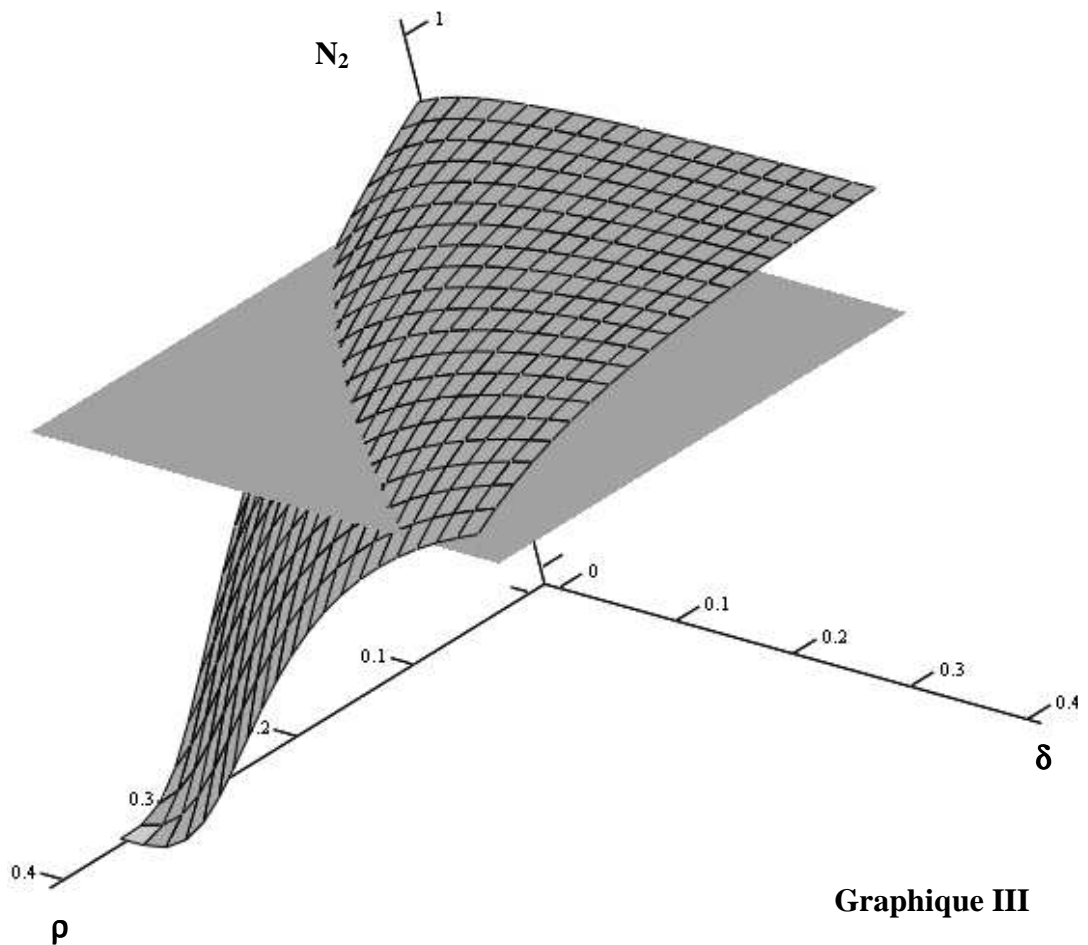
cette valeur supposée de sortie, ne relève que des conditions financières rencontrées pour l'entrée de l'opérateur (notamment des taux ρ et δ), et non de la dynamique du projet lui-même. Le taux de croissance espéré du projet (α) n'affecte donc que la date de sortie de l'opérateur, qui se détermine pour une valeur constante (V_2) du projet. Dans ces conditions, d'après la l'expression de l'espérance mathématique de la valeur du projet à une date t , la date de sortie devient :

$$t_2 = \frac{1}{\alpha - \rho} \ln \left(\frac{\beta_1 I_1}{(\beta_1 - 1) V_0} \right) \quad (18)$$

A cette date t_2 l'opérateur réalise donc une plus-value de :

$$F(V_2) = \frac{I_1}{(\beta_1 - 1)}$$

Par contre, la valeur $V_2' = \left(\frac{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho}{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho + \delta} \right)^{\frac{1}{\beta_1 - 1}} V_2$ se construit à partir du taux de croissance α du projet, ce qui conduit à une variation de cette valeur de sortie, en fonction de sa croissance espérée (α). La sortie du projet, (pour $n_2' = 1$) se réalise donc ici, pour des valeurs de V_2' et de t_2' dépendantes toutes les deux du taux α de croissance du projet.



Graphique III

Relations entre le coefficient N_2 (permettant une évaluation pour la sortie du projet, dans le cas d'un report des produits financiers), et les rendements des titres en portefeuille (ρ et δ)

L'introduction des produits financiers dans la gestion du projet tend à réduire la valeur de sortie ($V_2' \leq V_2$), ainsi que la durée de l'opération ($t_2' \leq t_2$). L'arbitrage entre le prolongement de l'option et son exercice, va reposer sur une évaluation des plus-values supplémentaires que générerait le maintien de l'option sur cette période ($t_2 - t_2'$), pour un volume $n_2' = 1$ constant du portefeuille risqué.

Dans ce cas de figure, l'opérateur se fixe comme critère de gestion une valeur minimale V_2' pour une sortie plus précoce du projet, valeur représentant la borne inférieure du niveau de rentabilité espéré du projet (ce rendement se construisant à partir des plus-values réalisées). Ce critère pose donc que, pour sortir de l'opération, le taux de plus-value attendu sur la période restant à couvrir ($t_2 - t_2'$), ne devra pas excéder une grandeur (k) spécifique aux critères de gestion interne du capital-risque. Le coefficient k exprime la perte subie par la revente précoce des titres risqués, il dépend donc des conditions de redéploiement des actifs vers d'autres opérations. A ce titre, il peut s'interpréter comme un coût d'opportunité, lié à l'implication possible de l'opérateur dans d'autres projets. Comme V_2 est indépendant du taux espéré α de croissance du projet, cette grandeur devient un repère intéressant, contribuant à la construction de la valeur minimale V_2' pour laquelle l'opérateur décide une sortie du projet (dès que : $n_2' = 1$). Les propos qui précèdent se résument alors dans la relation :

$$\frac{V_2 - V_2'}{V_2} \leq k \Leftrightarrow \left(\frac{\beta_1 (\alpha - \rho) - \rho}{\beta_1 (\alpha - \rho) - \rho + \delta} \right)^{\beta_1 - 1} \geq (1 - k) \quad (19)$$

Par conséquent, pour un écart relatif k donné *a priori* (en relation à des règles de gestion de l'opérateur concernant le rendement de son investissement), la relation (19) conduit à positionner le coefficient N_2 par rapport à k . Selon les critères de rentabilité posés par l'opérateur, il devient ainsi possible d'établir une relation entre le taux de croissance attendu du projet (α) et les taux (d'intérêt sans risque et de reversement de dividendes) retenus. La relation (19) devient donc :

$$\alpha_1 \geq \frac{\rho \left(1 - (1 - k)^{\beta_1 - 1} (\beta_1 + 1) \right) + \delta (1 - k)^{\beta_1 - 1}}{\beta_1 \left(1 - (1 - k)^{\beta_1 - 1} \right)} \quad (20)$$

Ainsi, en fixant le critère de gestion k , la relation ci-dessus définit une valeur plancher pour un taux de croissance espéré du projet. L'exercice de l'option se fonde alors sur l'objectif en terme de volume (n_2') des titres détenus, et se conforme à l'objectif plancher de plus-value, fixé par l'opérateur. Si le taux de croissance espéré du projet ne respecte pas cette inégalité, donc s'il s'avère trop faible, l'opérateur se verra limité dans ses choix de sortie, et une telle restriction l'incitera d'autant moins à entrer dans le projet. Par conséquent, le graphique IV (représentation de la fonction $\alpha_1(\rho, \delta)$), met clairement en évidence la manière dont les taux (d'intérêt sans risque et de dividendes versés) contraignent les prétentions sur le taux de croissance espéré, puisque, par exemple, plus le taux d'intérêt sans risque croît et plus le taux de croissance espéré (α) augmente, et moins il existera de projets à financer se pliant à cette condition.

Parallèlement, la gestion du projet par le capital-risque, peut s'appuyer sur une durée maximale d'intervention, fixée *a priori*. Donc, pour une valeur V_2 de sortie du projet, le problème posé au capital-risque consiste à savoir, si cette valeur sera atteinte avant une date limite. Dans ces conditions, si t^* représente la date butoir pour définir la durée d'implication de l'opérateur, la relation (18) se traduit par :

$$t_2 \leq t^* \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha - \rho} \ln \left(\frac{\beta_1 I_1}{(\beta_1 - 1) V_0} \right) \leq t^*$$

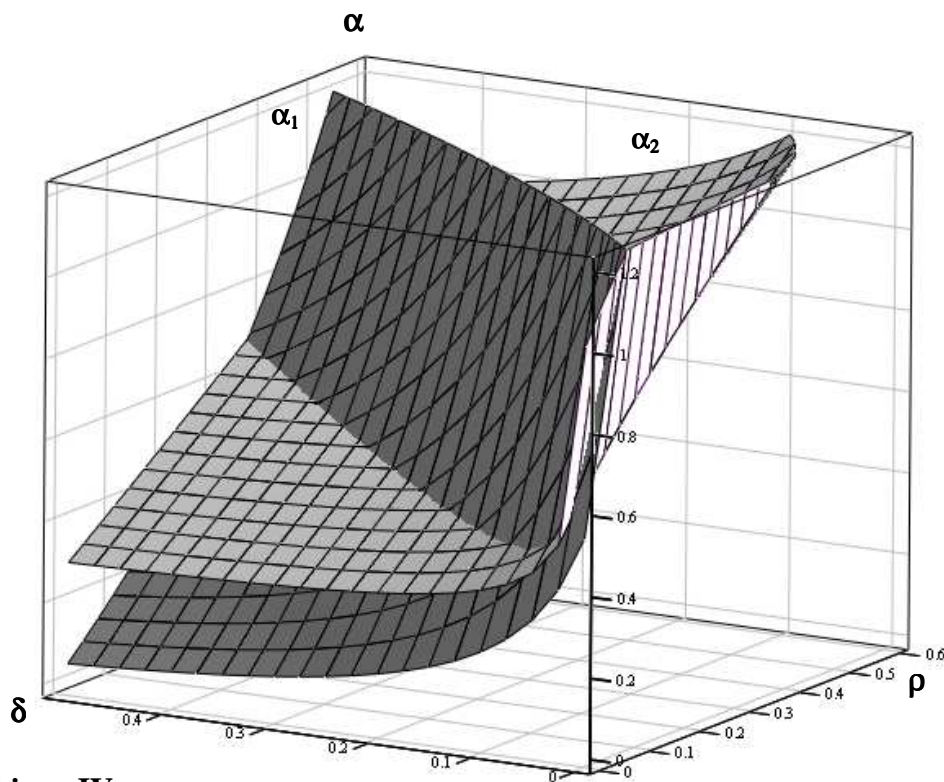
Cette relation permet alors de poser une autre condition sur le taux de croissance espéré du projet, par rapport aux taux d'intérêt sans risque et de dividendes versés, et cela en excluant la condition de reversement des produits financiers dans le projet :

$$\alpha_2 \geq \frac{1}{t^*} \ln \left(\frac{\beta_1 I_1}{(\beta_1 - 1) V_0} \right) + \rho \quad (21)$$

Ainsi, pour que l'objectif de l'opérateur soit atteint avant la date limite (t^*), le taux espéré de croissance du projet doit, bien entendu, être supérieur au taux d'intérêt sans risque (ρ), puisque :

$$\left(\frac{\beta_1 I_1}{(\beta_1 - 1) V_0} \right) > 0$$

Cette nouvelle condition se retrouve donc représentée par la fonction $\alpha_2(\rho, \delta)$ sur le graphique V



Graphique IV

Niveau minimum du taux de croissance espéré du projet, en fonction des taux d'intérêt sans risque et de dividendes versés, selon le critère de gestion : objectif en nombre de titres (α_1) ou en durée d'implication (α_2).

Dans les deux cas de figure, le graphique IV que la fonction $\alpha(\rho)$ est bien croissante et, qu'a contrario, $\alpha(\delta)$ est décroissante. Ce constat met donc bien en évidence que si le taux d'intérêt augmente, le choix des projets sera d'autant plus sélectif (l'opérateur ne sélectionnera que ceux qui renferment un potentiel de croissance suffisamment élevé). Si le rendement des titres risqués s'accroît, cela aura tendance à faire diminuer le potentiel de croissance requis pour le projet, et donc à rendre éligible un nombre plus important d'entre eux. La représentation des relations (20) et (21) sur le graphique IV illustre clairement les deux critères de gestion

retenus pour le capital-risque : le premier (α_1) exprimant un taux de croissance espéré minimum, sur la base d'un écart relatif plancher de la plus-value réalisée ; le second (α_2) sur la période maximale d'intervention. En fonction des valeurs de ρ et de δ , le graphique IV met en lumière des zones de domination d'un critère de gestion sur l'autre :

Si ρ s'avère relativement faible, alors $\alpha_2 > \alpha_1$ ce qui signifie que le critère de la durée d'implication dans le projet devient la règle de gestion déterminante pour le projet. La faiblesse du taux d'intérêt place au second plan les résultats de la gestion financière du projet et seule domine la date de départ, au regard d'autres opportunités d'investissement qui pourraient survenir.

Si ρ se révèle relativement élevé, alors $\alpha_1 > \alpha_2$ ce qui signifie que s'affirme le critère du nombre de titres en portefeuille, et donc, une fois le critère atteint, d'un retrait précoce du projet. Un taux d'intérêt élevé induit des coûts financiers importants et, à l'inverse du cas précédent, l'opérateur recherchera des conditions de sortie qui tendent à limiter ces frais financiers.

Un accroissement des dividendes versés (pour un taux d'intérêt sans risque donné), renforce le critère α_2 de gestion (basé sur la date *a priori* de sortie), et donc corrige les éventuelles augmentations du taux d'intérêt sans risque. L'opposition entre les critères intrinsèques au projet (δ) et extrinsèque (ρ) refait ici surface, l'espérance des dividendes versés dépend également du potentiel de croissance du projet.

Les exemples qui précèdent montrent une relative sensibilité du modèle aux variations du taux d'intérêt et du rendement des actifs risqués. Les deux taux ainsi retenus renvoient au caractère intrinsèque (rentabilité des actifs) et extrinsèque (taux obligataire) des variables conditionnant la gestion du projet ; ce qui n'est pas sans rappeler la distinction entre risque spécifique et systématique, appliquée aux actifs financiers¹. La construction de ce modèle met également l'accent sur la pertinence des outils financiers mobilisés par les opérateurs en capital-risque, comme les titres hybrides. En partant du principe que le modèle des options repose sur une gestion efficiente du risque (par construction), la constitution diversifiée de portefeuilles, ainsi que leur gestion continue, a mis en évidence la pertinence des outils financiers utilisés dans ce contexte (la relation entre obligations et titres risqués pour le premier, le recours aux titres hybrides pour le second).

¹ Markowitz H. [1952] Portfolio selection Journal of Finance Vol. 7 n°1 mars pp. 77-91

Sharpe W. [1964] Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. Journal of Finance Vol. 19 pp. 425-442.

Annexe I

Construction de l'espérance mathématique de la valeur du projet à une date t :

En posant que la valeur du projet suit un mouvement brownien géométrique, il est possible de montrer que l'expression :

$$V_t = V_0 e^{\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma z_t\right)}$$

est bien une solution de l'équation différentielle :

$$dV_t = \alpha V_t dt + \sigma V_t dz_t \quad (\mathbf{a})$$

qui s'exprime par l'équation intégrale :

$$V_t - V_0 = \int_0^t \alpha V_u du + \int_0^t \sigma V_u dz_u \quad (\mathbf{b})$$

En effet, en appelant : $g(z_t, t) = V_0 e^{\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma z_t\right)}$; alors :

$$g(z_t, t) = V_t \text{ et } g(z_0, 0) = V_0$$

Dans ces conditions,

$$\frac{dg}{dt}(z_t, t) = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)g(z_t, t) \quad \text{et} \quad \frac{dg}{dz}(z, t) = \sigma g(z, t) \quad \frac{d^2g}{dz^2}(z, t) = \sigma^2 g(z, t)$$

En appliquant le lemme de Ito à la relation **(b)**, et en considérant la fonction à deux variables $g(z_t, t) = V_t$; il vient :

$$g(z_t) - g(z_0) = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial z}(z, u) dz_u + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(z, u) du + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial u}(z, u) du$$

Ce qui s'écrit :

$$V_t - V_0 = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial z}(z, u) dz_u + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial t}(z, u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(z, u) \right) du$$

Et donc en remplaçant par les valeurs obtenues :

$$V_t - V_0 = \int_0^t \sigma g(z_u, u) dz_u + \int_0^t \left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)g(z_u, u) + \frac{1}{2} \sigma^2 g(z_u, u) \right) du$$

D'où

$$V_t - V_0 = \int_0^t \sigma g(z_u, u) dz_u + \frac{1}{2} \int_0^t \alpha g(z_u, u) du$$

Ce qui conduit au résultat :

$$V_t - V_0 = \int_0^t \alpha V_u du + \int_0^t \sigma V_u dz_u$$

Ce qui précède permet donc de démontrer que le processus stochastique $V = \{V_t : 0 \leq t \leq t_2\}$, défini par :

$$V_t = V_0 e^{\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma z_t\right)} \quad (\mathbf{c})$$

est bien une solution de l'équation différentielle :

$$dV_t = \alpha V_t dt + \sigma V_t dz_t$$

Dans ces conditions, en utilisant les propriétés de la fonction génératrice des moments, le calcul de l'espérance mathématique de la fonction :

$$X_t = e^{(a+bY)}$$

où Y représente une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite ; (a et b étant des constantes), alors :

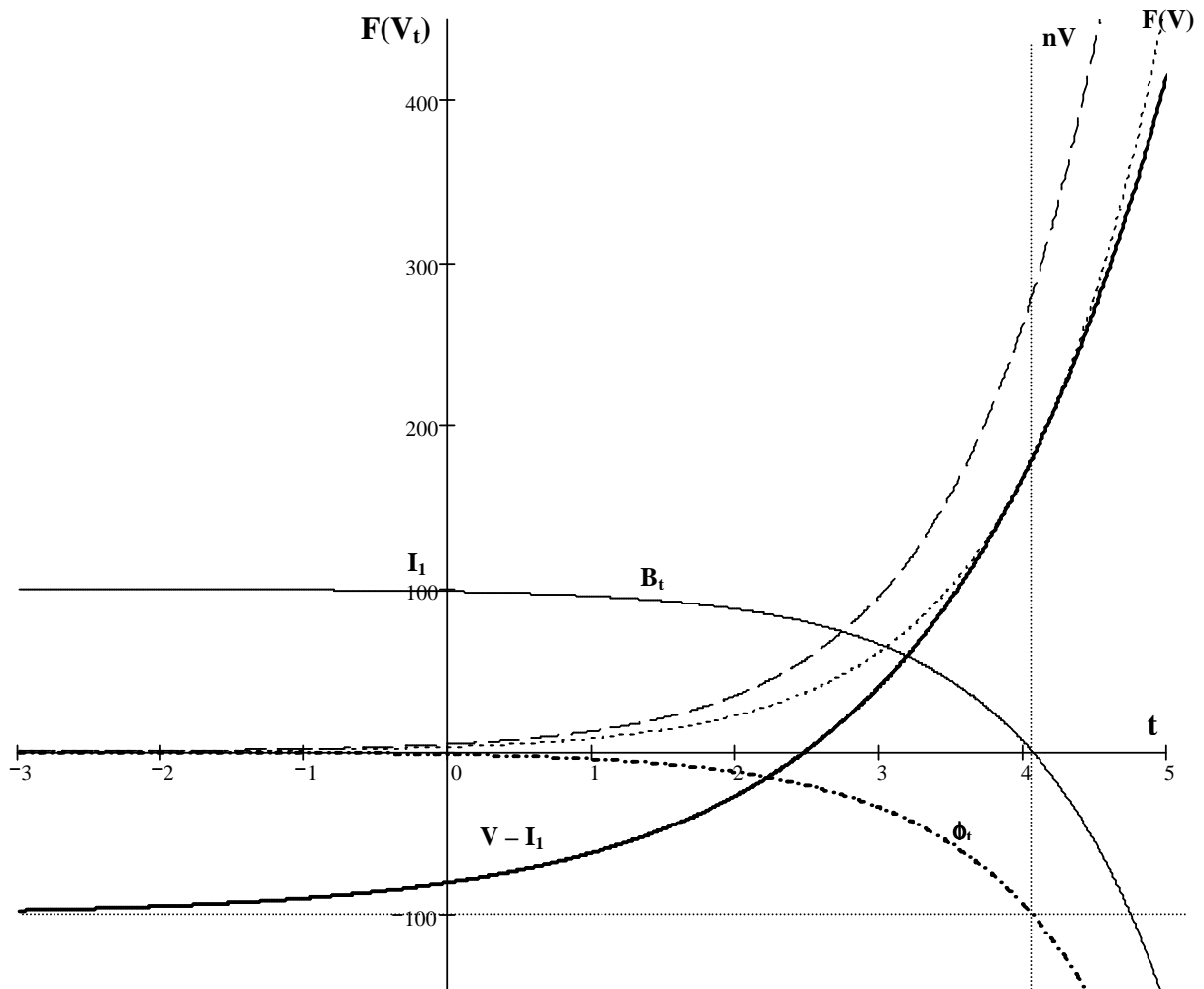
$$E[X_t] = E[e^{(a+bY)}] = e^{\left(a + \frac{b^2}{2}\right)}$$

En appliquant ce résultat à la relation **(c)**, il vient :

$$E[V_t] = V_0 E\left[e^{\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma z_t\right)}\right] = V_0 e^{\alpha t} \quad \text{(d)}$$

Annexe II

Vérification graphique de quelques hypothèses implicites dans le modèle.



Évolution des principaux paramètres du projet dans le cadre de la gestion du capital-risque

Le graphique ci-dessus se présente comme une traduction dans le temps du graphique I et replace ainsi les principales grandeurs introduites dans la gestion du capital-risque. Pour l'opérateur, le projet démarre à la date $t = 0$ et a déjà atteint une valeur V_0 . Le temps nécessaire pour atteindre ce niveau n'a ici aucune importance puisque, rigoureusement, la valeur actualisée nette antérieure à $t = 0$ prend une forme asymptotique lorsque $t \rightarrow -\infty$. Le modèle suppose donc implicitement que l'origine effective du projet tend vers l'infini, avec une réelle valorisation peu avant l'intervention du capital-risque. Dans tous les cas, les diverses expertises menées sur le projet, conduisent à estimer sa valeur à V_0 lorsque l'opérateur intervient.

Annexe III

Résolution de l'équation différentielle

Soit l'équation :

$$d\phi_t = \rho \phi_t dt + \delta \beta_1 F(V_t) dt - h \beta_1 F(V_t) dt$$

Cette expression s'écrit également, en développant l'expression :

$$h \beta_1 = \beta_1 (\beta_1 - 1)(\alpha - \rho) + \delta \beta_1 + \rho (1 - \beta_1)$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$d\phi_t = \rho \phi_t - (\rho(1 - \beta_1) - (\beta_1 - 1)(\alpha - \rho)\beta_1) K_0 e^{\beta_1(\alpha - \rho)t} dt \quad (\mathbf{a})$$

Il paraît ici nécessaire de souligner la disparition du terme $\delta \beta_1$, puisque la relation **(a)** reflète un équilibre emploi ressource. D'un côté, le flux de dividendes vient augmenter la valeur des disponibilités financières et, de l'autre, ce montant se retrouve dans l'achat de nouveaux titres risqués. Ce processus suppose donc que les dividendes perçus se retrouvent immédiatement investis en actions, en plus de la conversion d'une fraction des obligations. Dans ces conditions, ces flux s'inscrivent systématiquement de part et d'autre du signe égal. La résolution de l'équation différentielle **(a)**, s'opère de manière classique en deux étapes :

Solution sans second membre

$$d\phi_s = \rho \phi_s dt \Leftrightarrow \phi_s = \lambda_0 e^{\rho t}$$

Solution particulière, avec second membre

$$\phi_p = \lambda(t) e^{\rho t} \Leftrightarrow \frac{d\phi_p}{dt} = \frac{d\lambda(t)}{dt} e^{\rho t} + \rho \lambda(t) e^{\rho t}$$

Ainsi l'équation différentielle se réécrit :

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} e^{\rho t} = \rho (\beta_1 - 1) - (\beta_1 - 1)(\alpha - \rho)\beta_1 K_0 e^{\beta_1(\alpha - \rho)t}$$

Ce qui permet, par intégration, de trouver l'expression de $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{K_0}{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho} (\rho(\beta_1 - 1) - (\beta_1 - 1)(\alpha - \rho)\beta_1) e^{\beta_1(\alpha - \rho)t} e^{-\rho t} \quad (\mathbf{b})$$

Ce qui conduit à l'expression de la solution complète :

$$\phi(t) = \phi_s(t) + \phi_p(t) = \lambda_0 e^{\rho t} + K_0 (1 - \beta_1) e^{\beta_1(\alpha - \rho)t}$$

En posant qu'à la date origine, $\phi(0) = F(V_0) - n_0 V_0$, cela implique donc que $\lambda_0 = 0$

Ce qui s'écrit également :

$$\phi(t) = K_0 (1 - \beta_1) e^{\beta_1(\alpha - \rho)t}$$

Ce résultat permet donc de retrouver la définition du portefeuille sans risque :

$$\phi(t) = F(V_t) - n_t V_t$$

En revenant à la forme développée de la solution initiale (relation **(b)**), il vient :

$$\phi(t) = \frac{K_0}{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho} (\rho(\beta_1 - 1) - (\alpha - \rho)(\beta_1 - 1)\beta_1) e^{\beta_1(\alpha - \rho)t}$$

L'affectation du portefeuille sans risque à la date t se décompose en l'achat d'actions (conversion d'obligations) duquel se déduisent les frais financiers permettant de maintenir ce portefeuille. Ou, en revenant à la définition de l'expression $h \beta_1$ la décomposition du portefeuille sans risque devient :

$$\phi(t) = \frac{K_0}{\beta_1(\alpha - \rho) - \rho} (\delta - h) \beta_1 e^{\beta_1(\alpha - \rho)t}$$

Cette relation fournit une autre expression quant à la destination du portefeuille sans risque, qui se ventile en un montant disponible net pour l'achat de titres risqués et le flux de dividendes perçus sur la détention d'actions.

Éléments bibliographiques

- Botteron P. Casanova J. F. [2003] Start-up defined as portfolio of embedded options. FAME Working Paper No 85
- Dixit A. Pindyck R. [1994] Investment under uncertainty. Princeton University Press. - Princeton
- Howe C. Myers S. [1997] A life cycle model of pharmaceutical R&D. Technical report, Program on the pharmaceutical industry. MIT
- Kaplan S. Stromberg P. [2001] Venture capital as principals: contracting, screening and monitoring. American Economics Review Vol 91 n° 2 Mai pp 426-430.
- Lamberton D. Lapeyre B. [1997] Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. Ellipses - Paris
- Markowitz H. [1952] Portfolio selection Journal of Finance Vol. 7 n°1 mars pp. 77-91
- Panayi S. Trigeorgis L. [1998] Multi-stage real options: The cases of information technology infrastructure and international bank expansion. Quarterly Review of Economics and Finance. Vol 38 (pp. 675-692)
- Poncet C. [2006] De l'académie vers le marché. Revue Française de Gestion. N° 161 Février pp 13-34
- Schmidt K. [2003] Convertible securities and venture capital finance. Journal of Finance Vol 58 june.
- Scholes M. [1998] Derivative in a dynamic environment. American Economic Review. Vol 88 n°3 (pp. 350-370)
- Sharpe W. [1964] Capital asset prices : a theory of market equilibrium under conditions of risk. Journal of Finance Vol. 19 pp. 425-442.